N° d'ordre : D.U. : 1594
EDSPIC : 328

Université BLAISE PASCAL - Clermont II

École Doctorale

Sciences pour l'Ingénieur de Clermont-Ferrand

Thèse

présentée et soutenue publiquement par

Marc BERVEILLER
Ingénieur IFMA

le **18 octobre 2005**

pour obtenir le grade de

Docteur d'Université
(Spécialité : Génie Mécanique)

Éléments finis stochastiques : approches intrusive et non intrusive pour des analyses de fiabilité

Jury :

MM.	Didier CLOUTEAU	Ecole Centrale Paris	Rapporteur
	Olivier LE MAITRE	Université d'Evry Val d'Essonne	Examinateur
	Maurice LEMAIRE	IFMA	Directeur de thèse
	Alain MILLARD	CEA	Rapporteur
	Christian SOIZE	Université de Marne la Vallée	Président du jury
	Bruno SUDRET	EDF R&D	Co-directeur de thèse

Laboratoire de Mécanique et Ingénieries (LaMI),
Université Blaise Pascal et Institut Français de Mécanique Avancée.

Département Matériaux et Mécanique des Composants (MMC),
Electricité de France - Recherche & Développement.

A mes grands parents,
A mes parents.

Remerciements

La pertinence et la qualité des résultats produits à l'occasion de la préparation d'une thèse dépendent non seulement du doctorant mais également de l'encadrement. Dans mon cas, **Bruno Sudret** a été présent à toutes les étapes de ce travail : du choix du sujet à la relecture du mémoire en passant par ses conseils de tous les jours. Pour tout cela, Bruno, je te remercie très chaleureusement.

Je remercie sincèrement le Professeur **Maurice Lemaire**, qui a accepté de diriger cette thèse et qui n'a pas ménagé ses conseils toujours très pertinents.

Je tiens également à remercier Messieurs **Didier Clouteau** et **Alain Millard** qui ont accepté de rapporter sur ce travail. Leurs appréciations positives constituent pour moi un tremplin pour la suite de mes recherches.

Monsieur **Christian Soize** m'a fait l'honneur de présider mon jury de soutenance. Je le remercie pour l'intérêt qu'il a manifesté dans la lecture de ce travail et lui en suis très reconnaissant.

Je remercie **Olivier Le Maître**, qui a accepté d'examiner ce travail et de faire partie du jury.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance au **département Matériaux et Mécanique des Composants** (MMC) d'**Electricite de France Recherche et Développement**, pour le soutien financier apporté à cette thèse. Mon travail a ainsi pu avancer dans d'excellentes conditions. Je remercie aussi l'ensemble des agents du département MMC et plus particulièrement ceux du groupe Mécanique des Matériaux et des Structures (T26) pour l'excellente ambiance de travail dans laquelle j'ai évolué.

Mes pensées vont également vers tous les doctorants (Méjido, Zoubir, Jean-Philippe, Frédéric, Anne, Etienne) et stagiaires du département avec lesquels j'ai passé de bons moments.

Pour finir, je remercie tout mon entourage, ma famille ainsi qu'Agathe qui m'ont accompagné pendant ces trois années parfois difficiles.

Résumé

La méthode des éléments finis développée depuis une cinquantaine d'années est couramment utilisée de nos jours dans de nombreuses industries pour évaluer de façon fine le comportement de systèmes mécaniques. La pertinence globale d'un modèle aux éléments finis repose sur l'idée que les paramètres d'entrée sont parfaitement connus et maîtrisés, ce qui est rarement le cas dans les problèmes industriels. Modéliser l'aléa sur ces paramètres d'entrée et en caractériser les conséquences sur la réponse du modèle constitue donc une nouvelle étape dans la simulation numérique en mécanique. La résolution de problèmes de mécanique probabiliste (exprimés sous la forme d'équations aux dérivées partielles stochastiques) par une double discrétisation, dans l'espace physique (éléments finis classiques) et dans l'espace de probabilité n'est apparue qu'au début des années 1990 [GS91]. Cette méthode baptisée *méthode des éléments finis stochastiques spectraux* (MEFSS) s'appuie sur une représentation intrinsèque de la réponse stochastique du système sur une base spécifique baptisée chaos polynomial. Cette méthode a été développée dans le contexte de la *variabilité spatiale* des propriétés mécaniques (représentées par un ou plusieurs champs aléatoires). L'objectif de la thèse est de voir si la MEFSS est applicable dans des problèmes dans lesquels l'aléa sur les paramètres décrivant les matériaux et/ou le chargement est représenté par des *variables aléatoires* de type quelconque et en nombre quelconque.
Une nouvelle formulation de la méthode des éléments finis stochastiques (baptisée MEFS) est développée dans le cadre de la mécanique linéaire élastique. Les différentes étapes de sa mise en oeuvre sont les suivantes :

- développement de chaque variable aléatoire d'entrée en une série de polynômes d'Hermite de gaussiennes centrées réduites,
- représentation de la réponse mécanique sur la base du chaos polynomial. Les coefficients du développement sont calculés par une méthode de type Galerkin dans l'espace de probabilité.
- résolution du système linéaire ainsi obtenu par une méthode directe ou hiérarchique,

- post-traitement des coefficients du développement pour résoudre des problèmes de sensibilité (calcul des moments statistiques de la réponse) ou de fiabilité (calcul d'une probabilité de défaillance).

De façon alternative, les coefficients du développement de la réponse sur le chaos polynomial peuvent être calculés par une méthode de régression ou par une méthode de projection uniquement à partir de calculs aux éléments finis déterministes. La méthode de projection se réduit au calcul d'une intégrale, qui peut être fait soit par des méthodes de simulation soit par un schéma de quadrature de Gauss. La méthode de régression est analogue à la méthode de surface de réponses habituellement utilisée en fiabilité. Cependant, nous proposons un choix pour les points du plan d'expériences. Ces approches, baptisées *non intrusive*, présentent plusieurs avantages par rapport à la MEFS :

- elle est compatible avec tout code aux éléments finis déterministe existant, sans implémentation spécifique dans le code,
- elle est applicable pour des problèmes non linéaires,
- elle permet de prendre en compte l'aléa sur la géométrie de la structure,
- elle ne nécessite pas d'approximation des variables d'entrée du problème.

Les méthodes non intrusives ont été validées sur des cas tests de fiabilité afin de tester leur efficacité dans les queues de distribution. Les méthodes MEFS et intrusives ont été testées et comparées sur des exemples de mécanique élastique linéaire. Les méthodes non intrusives sont aussi précises et plus efficaces que la MEFS autant pour le calcul des moments de la réponse que pour des analyses de fiabilité. Enfin les méthodes non intrusives ont été utilisées dans un cas de mécanique de la rupture non linéaire (tuyau fissuré). Les méthodes non intrusives se sont avérées plus efficaces qu'un couplage direct entre un code aux éléments finis et un code probabiliste pour résoudre le problème posé.

Abstract

The finite element method is currently used to examine the behaviour of structures. The results is based on the fact that input parameters are exactly known, but it is often not true in real-life problems. The new stage in simulation is to take into account the randomness into input parameters and to evaluate its consequences on the response of the system. The *spectral stochastic finite element method*, developed in the early 90's, used an intrinsic representation of the response onto a basis, called the *polynomial chaos*. It was developed for the spatial variability of mechanical properties (represented by random fields). The aim of this thesis is to used this method for random variables which represent randomness onto material properties and loading. A new formulation of the stochastic finite element method was proposed. The different steps of this formulation are :

- expansion of the input random variables onto the polynomial chaos
- representation of the response onto the polynomial chaos
- resolution of the system obtained by minimization of the residuals in the balance equation in the Galerkin sense
- post-processing of the coefficients of the expansion of the response for dispersion problems (computation of statistical moments of the response) and reliability analysis.

Coefficients of the expansion of the response onto the polynomial chaos can be computed by using two alternative methods : a regression one and a projection one. They used only deterministic finite element analysis and an analytical post-processing of the results. In the projection method, the difficulty is to compute an integral with a simulation method or a quadrature scheme. In the regression method, we propose an optimal choice for the experimental design. Both methods are called *non intrusive* method and presents some advantages compared to the stochastic finite element method developed at first :

- they can be used with any finite element code, without a specific implementation,
- the can be used for non linear problems,
- randomness onto the geometry can be take into account,
- it is not necessary to approximate input random variables.

Non intrusive methods has been tested in reliability case studies for testing their accuracy in representing the response distribution tails. The extension of the stochastic finite element method and non intrusive method has been compared on elastic linear mechanical problems. For these problems, non intrusive methods are more efficient and more accurate than the extension of the stochastic finite element method. The non intrusive methods are illustrated by the analysis of a crack in a pipe weld in the context of fracture mechanics and are more efficiency than a direct coupling between a finite element code and a reliability code.

Table des matières

I Introduction **1**

I.1 Contexte 2

I.2 Problématique 3

I.3 Objectifs du travail 3

II Eléments finis stochastiques spectraux et chaos polynomial **5**

II.1 Introduction 6

II.2 Généralités 6

II.2.1 Espace de probabilité et variables aléatoires 6

II.2.2 Espace des variables aléatoires de carré sommable 7

II.2.3 Champs aléatoires 9

II.3 Méthodes de discrétisation de champs aléatoires 9

II.3.1 Introduction 9

II.3.2 Discrétisation de Karhunen-Loève 10

II.4 Le chaos polynomial 11

II.4.1 Définition 11

II.5 Éléments finis stochastiques en élasticité linéaire 13

II.5.1 Méthode des éléments finis déterministes 13

II.5.2 Equation d'équilibre stochastique 14

II.5.3 Représentation de la réponse en utilisant des séries de Neumann 15

II.5.4 Représentation générale de la réponse dans $\mathcal{L}^2(\Theta, \mathcal{F}, P)$ . . . 16

II.5.5 Obtention des coefficients par la méthode de Galerkin 17

II.5.6 Stratégies de résolution 18

II.6 Utilisations et évolutions de cette méthode 20

II.7 Limitations et conclusions 20

III Extension de la méthode des éléments finis stochastiques **23**

III.1 Introduction 25

III.2 Approximation de variables aléatoires par des polynômes de gaussiennes 25

III.2.1 Introduction 25

III.2.2 Méthode de projection 25

III.2.3 Méthode de régression 30
III.2.4 Applications 31
III.2.5 Estimateurs d'erreurs 39
III.2.6 Développement de fonctions de variables aléatoires 46
III.2.7 Développements de plusieurs variables aléatoires indépendantes 47
III.2.8 Conclusion 48
III.3 Eléments finis stochastiques en élasticité linéaire 49
III.3.1 Introduction 49
III.3.2 Introduction de propriétés matériaux aléatoires 49
III.3.3 Introduction de chargements aléatoires 52
III.3.4 Obtention du système linéaire 53
III.3.5 Stratégies de résolution 54
III.3.6 Développement de la réponse du système 54
III.3.7 Conclusion 56
III.4 Post-traitements 56
III.4.1 Introduction 56
III.4.2 Calcul des moments statistiques 57
III.4.3 Analyse de fiabilité 57
III.4.4 Calcul de la densité de probabilité 58
III.4.5 Conclusions 61
III.5 Application : Tassement d'une fondation 61
III.5.1 Position du problème 62
III.5.2 Résultats 62
III.5.3 Conclusion 69
III.6 Conclusions et limitations 69

IV Méthodes non intrusives 71
IV.1 Introduction 72
IV.2 Méthode de projection 72
IV.2.1 Présentation 72
IV.2.2 Méthodes de simulations 73
IV.2.3 Méthode de quadratures de Gauss 74
IV.2.4 Conclusions 76
IV.3 Méthodes de régression 76
IV.3.1 Méthode de collocation 76
IV.3.2 Méthode de surface de réponse 78
IV.3.3 Méthode de régression 80
IV.3.4 Conclusions 84
IV.4 Equivalence entre les deux approches [Sud05] 84
IV.5 Utilisation des méthodes non intrusives 85

IV.5.1 Méthode de projection 85
IV.5.2 Méthode de régression 88
IV.5.3 Conclusions 89
IV.6 Conclusions 90

V Validation et applications **93**
V.1 Introduction 95
V.2 Cas tests analytiques pour la fiabilité 95
V.2.1 Introduction 95
V.2.2 Cas test numéro 1 97
V.2.3 Cas test numéro 2 98
V.2.4 Cas tests 3-4-5 100
V.2.5 Cas test numéro 6 105
V.2.6 Cas test numéro 7 106
V.2.7 Conclusion 107
V.3 Tassement d'une fondation 107
V.3.1 Position du problème 107
V.3.2 Calcul des moments de la réponse 109
V.3.3 Analyse de fiabilité 109
V.3.4 Performances 112
V.3.5 Conclusion 114
V.4 Convergence d'un tunnel 115
V.4.1 Position du problème 115
V.4.2 Introduction des aléas dans le modèle 115
V.4.3 Calcul des moments de la réponse 117
V.4.4 Analyse fiabiliste 118
V.4.5 Résultats complémentaires 119
V.4.6 Conclusion 121
V.5 Tuyau fissuré 123
V.5.1 Présentation de l'étude 123
V.5.2 Définition des variables aléatoires 123
V.5.3 Calcul des moments statistiques de la réponse 126
V.5.4 Analyse de fiabilité 127
V.5.5 Conclusion 128
V.6 Conclusion 131

VI Conclusion - Perspectives **133**

Liste des tableaux **141**

Liste des figures **145**

A Implémentation du chaos polynomial **155**

B Méthodes de simulation **159**
B.1 Méthode de simulation de Monte Carlo 160
B.2 Méthode de simulation stratifiée 160
B.3 Méthode de l'hypercube latin 161

C Méthodes de fiabilité **165**
C.1 Présentation 166
C.2 Méthode FORM/SORM 166
C.3 Tirage d'importance (ou Importance Sampling) 168

D Table des notations **171**

Chapitre -I-

Introduction

Sommaire

I.1	**Contexte**	**2**
I.2	**Problématique**	**3**
I.3	**Objectifs du travail**	**3**

I.1 Contexte

La méthode des éléments finis développée depuis une cinquantaine d'années [TCMT56] est couramment utilisée de nos jours dans beaucoup d'industries pour évaluer de façon fine le comportement de systèmes mécaniques. De nombreux progrès ont été accomplis sur la formulation d'éléments finis performants, de lois de comportement pertinentes et de solveurs efficaces.

Cependant, la pertinence globale d'un modèle aux éléments finis repose sur l'idée que les paramètres d'entrée (géométrie, comportement, chargement) sont parfaitement connus et maîtrisés, ce qui est rarement le cas dans les problèmes industriels, et que, de plus le modèle est adapté à la physique. Modéliser l'aléa sur ces paramètres d'entrée et en caractériser les conséquences sur la réponse du modèle constitue donc une nouvelle étape dans la simulation numérique en mécanique.

Depuis une vingtaine d'années, le mariage éléments finis - probabilités s´est développé sous deux aspects :

- le *calcul des moments statistiques*, par lequel on s'intéresse essentiellement à la variabilité (écart-type, ...) de la réponse autour de sa moyenne ;
- les *méthodes de fiabilité*, par lesquelles on cherche à calculer une probabilité de défaillance associée à un critère, représenté par une fonction d'état limite dont les arguments dépendent du résultat d'un calcul aux éléments finis.

EDF a la volonté de prendre en compte l'aléa sur les paramètres d'entrée pour s'assurer de la fiabilité et de la sûreté de ses installations. En effet, la fiabilité est impliquée à la fois dans la sécurité humaine et pour la sûreté des matériels. Les couplages entre un code aux éléments finis et un code probabiliste sont utilisés avec des méthodes adaptées (*e.g.* simulations de Monte Carlo, méthodes d'approximation du premier et du second ordre FORM/SORM (pour *First/Second Order Reliability Method*)). La méthode de simulation de Monte Carlo, basée sur la *loi des grands nombres*, permet d'aborder les deux classes de problèmes mais à des coûts de calcul souvent prohibitifs, ce qui n'est pas envisageable en contexte industriel. C'est pourquoi les méthodes d'approximation ont été développées depuis une vingtaine d'années dans le cadre des analyses de fiabilité. Le principe général des méthodes FORM/SORM est une approximation du domaine de défaillance par un domaine adapté et simplifié sur lequel des techniques numériques sont utilisées. Ces méthodes d'approximation permettent de diminuer les coûts de calculs, mais engendrent une perte de précision dans certains cas en comparaison de la méthode de Monte Carlo. La méthode des éléments finis stochastiques développée par Ghanem [GS91] au début des années 1990 permet de calculer les moments statistiques de la réponse et de faire des analyses de fiabilité en une seule étape. EDF a souhaité explorer cette méthode et son applicabilité aux études effectuées au sein du département Matériaux et Mécanique des Composants (MMC) d'EDF R&D.

I.2 Problématique

La méthode des éléments finis stochastiques pour la résolution de problèmes de mécanique probabiliste (exprimés sous la forme d'équations aux dérivées partielles stochastiques) s'appuie sur une double discrétisation, dans l'espace physique (éléments finis classiques) et dans l'espace de probabilité. Cette méthode s'appuie sur une représentation intrinsèque de la réponse stochastique du système (*e.g.* le vecteur aléatoire des déplacements nodaux) sur une base spécifique baptisée chaos polynomial. Cette méthode a été développée dans le contexte de la *variabilité spatiale* des propriétés mécaniques (représentées par un ou plusieurs champs aléatoires). Cette prise en compte de l'aléa sur le matériau induit une modification de la matrice de rigidité dans l'équation d'équilibre, qui se matérialise par le développement en série de cette matrice ainsi que des vecteurs des déplacements nodaux et du chargement. Cette modification de l'équation d'équilibre est facile à mettre en œuvre dans le cas de modèles linéaires mais beaucoup moins lorsque des non linéarités apparaissent. Cependant la forme de la réponse (développement du vecteur nodaux dans la base du chaos polynomial) permet de connaître toute la réponse stochastique de tous les degrés de liberté du problème. A partir de ce développement analytique, les méthodes standards (de calcul de moments statistiques et de fiabilité) peuvent être utilisées à moindre coût.
L'intérêt de la méthode des éléments finis stochastiques apparait comme évident à condition de pouvoir étendre son champ d'application à des problèmes où l'aléa, représenté par des variables aléatoires de type quelconque et en nombre quelconque, porte sur des paramètres matériau et sur le chargement. Il est aussi nécessaire de pouvoir utiliser cette méthode pour des analyses non linéaires.

I.3 Objectifs du travail

L'objectif de la thèse est de développer une nouvelle formulation aux éléments finis stochastiques (MEFS) pour des problèmes dans lesquels l'aléa sur les paramètres décrivant les matériaux et/ou le chargement est représenté par des *variables aléatoires* de type quelconque (*i.e.* non forcément gaussiennes) et en nombre quelconque. Cette nouvelle formulation doit être applicable à des cas non linéaires pour pouvoir répondre aux attentes d'EDF. Si cette nouvelle formulation s'avère être au moins aussi précise que les méthodes d'approximation jusque là utilisées (à savoir FORM et SORM), il faudra comparer l'efficacité de la méthode des éléments finis stochastiques par rapport à ces méthodes d'approximation. La nouvelle formulation doit être utilisable avec le code aux éléments finis développé par EDF : Code_Aster®[1].

[1] `http ://www.code-aster.org`

Après un rappel de probabilité, le **premier chapitre** du mémoire permet de faire un état des lieux sur la méthode des éléments finis stochastiques, développée par Ghanem et ses collaborateurs au début des années 1990, au travers d'une étude bibliographique. On aborde également les utilisations et évolutions de cette méthode depuis son apparition.

Le **deuxième chapitre** présente une nouvelle formulation de la méthode des éléments finis stochastiques qui permet d'étendre son champ d'application à des problèmes où l'aléa, représenté par des variables aléatoires de type quelconque et en nombre quelconque, porte sur des paramètres matériau et sur le chargement. Les différents post-traitements disponibles à partir du développement de la réponse sur le chaos polynomial sont présentés. Enfin un exemple d'application en mécanique élastique linéaire permet de s'assurer de la précision de la méthode.

Le **troisième chapitre** traite de deux méthodes des éléments finis stochastiques dites *non intrusives*. Cet intitulé signifie qu'elles ne nécessitent pas d'implémentation dans un code aux éléments finis contrairement à la méthode des éléments finis stochastiques du deuxième chapitre, tout en obtenant le même résultat. On obtient le développement de la réponse dans la base du chaos polynomial uniquement à partir d'un nombre fini de calculs aux éléments finis déterministes et d'un post-traitement adéquat. Deux méthodes sont présentées : une première fondée sur la projection de la réponse sur la base du chaos polynomial et une seconde basée sur une méthode de régression.

Le **quatrième chapitre** concerne la validation et l'utilisation des méthodes aux éléments stochastiques présentées dans les chapitres deux et trois. Une première étape constitue en la validation des méthodes dites *non intrusives* sur des cas tests analytiques pathologiques pour des analyses de fiabilité. Ensuite, deux exemples en mécanique élastique linéaire sont présentés afin de comparer la nouvelle formulation de la méthode aux éléments finis stochastiques, les méthodes *non intrusives* avec les méthodes de référence. Enfin un dernier exemple concerne l'utilisation des méthodes *non intrusives* en mécanique non linéaire de la rupture.

Enfin, le **dernier chapitre** est dédié aux conclusions et aux perspectives des travaux effectués.

Chapitre -II-

Eléments finis stochastiques spectraux et chaos polynomial

Sommaire

II.1 Introduction 6

II.2 Généralités 6

II.2.1 Espace de probabilité et variables aléatoires 6

II.2.2 Espace des variables aléatoires de carré sommable 7

II.2.3 Champs aléatoires 9

II.3 Méthodes de discrétisation de champs aléatoires 9

II.3.1 Introduction 9

II.3.2 Discrétisation de Karhunen-Loève 10

II.4 Le chaos polynomial 11

II.4.1 Définition 11

II.5 Éléments finis stochastiques en élasticité linéaire 13

II.5.1 Méthode des éléments finis déterministes 13

II.5.2 Equation d'équilibre stochastique 14

II.5.3 Représentation de la réponse en utilisant des séries de Neumann 15

II.5.4 Représentation générale de la réponse dans $\mathcal{L}^2(\Theta, \mathcal{F}, P)$ . . 16

II.5.5 Obtention des coefficients par la méthode de Galerkin . . . 17

II.5.6 Stratégies de résolution 18

II.6 Utilisations et évolutions de cette méthode 20

II.7 Limitations et conclusions 20

II.1 Introduction

Depuis une vingtaine d'années, de nombreuses méthodes ont été développées pour prendre en compte l'aléa dans des problèmes mécaniques. L'expression *éléments finis stochastiques* regroupe différentes méthodes qui n'ont pas forcément les mêmes origines. Nous focalisons l'étude sur la méthode des éléments finis stochastiques spectraux (MEFSS) développée par Ghanem [GS91] aux début des années 1990. Cette méthode permet d'obtenir la réponse stochastique complète. Ce chapitre ne vise pas à une étude bibliographique exhaustive sur le sujet, mais simplement à placer le contexte de la thèse dans la vision des travaux de Ghanem et du chaos polynomial. Après un bref rappel de probabilités, nous présentons une méthode de discrétisation de champs aléatoires : la discrétisation de Karhunen-Loève. Ensuite, nous introduisons la notion de chaos polynomial. Enfin nous finissons en présentant la méthode des éléments finis stochastiques spectraux.

II.2 Généralités

L'ensemble des définitions présentes dans cette section sont issues de [Sap90] et de [Rad91].

II.2.1 Espace de probabilité et variables aléatoires

Classiquement l'observation d'un phénomène aléatoire est appelée *épreuve*. Toutes les *réalisations* possibles d'une épreuve forment l'ensemble de tous les résultats d'une expérience aléatoire, qui sera noté Θ. Un *événement* E est défini comme un sous-ensemble de Θ contenant les réalisations $\theta \in \Theta$. La théorie des probabilités consiste en l'association de nombres aux événements, *i.e.* leur *probabilité d'occurrence*. Notons P cette *mesure de probabilité*. L'ensemble de tous les événements possibles ayant une probabilité ainsi définie est appelé une σ -algèbre associée à Θ, et est notée $\mathcal{F}$. Finalement l'*espace de probabilité* construit grâce à ces notions est noté $(\Theta, \mathcal{F}, P)$.
Une *variable aléatoire* réelle X est une fonction $X : (\Theta, \mathcal{F}, P) \longrightarrow \mathbb{R}$. Pour les variables aléatoires continues, la densité de probabilité et la fonction de répartition sont notées $f_X(x)$ et $F_X(x)$, respectivement, et l'indice $_X$ pourra être omis lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion. Pour souligner le caractère aléatoire de X, on utilise la notation $X(\theta)$. Un *vecteur aléatoire* $\underline{X}$ est un vecteur dont les composantes sont des variables aléatoires.
L'espérance mathématique est notée E[.]. La moyenne, la variance et les moments

d'ordre n de X sont :

$$\begin{aligned} \mu \equiv \mathrm{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \\ \sigma^2 = \mathrm{E}[(X-\mu)^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f_X(x) dx \\ \mathrm{E}[X^n] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x) dx \end{aligned} \tag{2.1}$$

Les moments centrés réduits d'ordre 3 et 4 portent respectivement les noms de coefficient d'asymétrie (ou skewness) et coefficient d'aplatissement (ou kurtosis) définis par :

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\mathrm{E}[(X-\mu_X)^3]}{\sigma^3} \\ \kappa &= \frac{\mathrm{E}[(X-\mu_X)^4]}{\sigma^4} \end{aligned} \tag{2.2}$$

La covariance de deux variables aléatoires X et Y est définie par :

$$\mathrm{Cov}[X,Y] = \mathrm{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] \tag{2.3}$$

En introduisant la densité de probabilité conjointe $f_{X,Y}(x,y)$ de ces variables, l'équation (2.3) peut se réécrire :

$$\mathrm{Cov}[X,Y] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)(y-\mu_Y) f_{X,Y}(x,y) dx\, dy \tag{2.4}$$

Si σ_X et σ_Y sont respectivement les écarts-types des variables X et Y, le coefficient de corrélation entre deux variables aléatoires X et Y est défini par :

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}[X,Y]}{\sigma_X \sigma_Y} \tag{2.5}$$

Dans tout le mémoire, on notera $\xi = \mathcal{N}(0,1)$ une variable aléatoire gaussienne *centrée réduite* (v.a.g.c.r.) de moyenne nulle et d'écart type 1, de densité de probabilité :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{2.6}$$

et de fonction de répartition :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds \tag{2.7}$$

II.2.2 Espace des variables aléatoires de carré sommable

L'espace vectoriel des variables aléatoires réelles de second moment fini est noté $\mathcal{L}^2(\Theta, \mathcal{F}, P)$. L'opérateur de moyenne permet de définir dans cet espace un produit scalaire et une norme associée comme suit :

$$\begin{aligned} < X, Y > &\equiv \mathrm{E}[XY] \\ \| X \| &= \sqrt{\mathrm{E}[X^2]} \end{aligned} \tag{2.8}$$

On montre qu'on peut choisir comme base de $\mathcal{L}^2(\Theta, \mathcal{F}, P)$ les polynômes d'Hermite multidimensionnels de gaussiennes centrées réduites [Mal97].

Polynômes d'Hermite. La première définition des polynômes d'Hermite a été donnée en 1864 comme une suite fonctionnelle s'obtenant par dérivations successives :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = (-1)^n \frac{1}{\varphi(x)} \frac{\mathrm{d}^n \varphi(x)}{\mathrm{d}x^n} \tag{2.9}$$

Ces polynômes vérifient la relation d'orthogonalité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) H_m(x) \varphi(x) dx = \delta_{nm} n! \tag{2.10}$$

où δ_{nm} est le symbole de Kronecker. Les polynômes d'Hermite vérifient la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} H_0(x) = 1 \\ H_n(x) = x\, H_{n-1}(x) - \dfrac{\mathrm{d}H_{n-1}(x)}{\mathrm{d}x} \end{cases} \tag{2.11}$$

On note que le terme de plus haut degré de H_n est x^n. Les premiers polynômes d'Hermite sont :

$$\begin{array}{rcl} H_0(x) & = & 1 \\ H_1(x) & = & x \\ H_2(x) & = & x^2 - 1 \\ H_3(x) & = & x^3 - 3x \\ H_4(x) & = & x^4 - 6x^2 + 3 \\ H_5(x) & = & x^5 - 10x^3 + 15x \end{array} \tag{2.12}$$

Par ailleurs, les polynômes d'Hermite possèdent les propriétés suivantes, utiles par la suite [Mal97] :

$$\frac{\mathrm{d}H_n(x)}{\mathrm{d}x} = n\, H_{n-1}(x) \tag{2.13}$$

et :

$$H_i(x)\, H_j(x) = \sum_{k=|i-j|}^{i+j} C_{ijk}\, H_k(x) \tag{2.14}$$

avec :

$$\begin{cases} C_{ijk} = 0 \quad \text{si} \quad \frac{i+j+k}{2} \notin \mathbb{N} \\ \\ C_{ijk} = \dfrac{i!j!}{\left(\frac{i+j-k}{2}\right)! \left(\frac{i+k-j}{2}\right)! \left(\frac{j+k-i}{2}\right)!} \quad \text{sinon} \end{cases} \tag{2.15}$$

Pour toute v.a.g.c.r. ξ, l'équation (2.10) s'interprète comme suit :

$$< H_m(\xi), H_n(\xi) >= \delta_{nm} n! \tag{2.16}$$

Enfin, d'après (2.14), l'espérance d'un produit de trois polynômes de gaussiennes $D_{ijk} = \mathrm{E}[H_i(\xi)H_j(\xi)H_k(\xi)]$ vaut :

$$\begin{cases} D_{ijk} = \dfrac{i!j!k!}{\left(\frac{i+j-k}{2}\right)!\left(\frac{j+k-i}{2}\right)!\left(\frac{k+i-j}{2}\right)!} & , \quad \text{si } i+j+k \text{ pair et } k \in [|i-j|, i+j] \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases} \tag{2.17}$$

II.2.3 Champs aléatoires

Un champ aléatoire scalaire $H(\underline{x}, \theta)$ peut être défini comme un ensemble de variables aléatoires indexées par un paramètre continu $\underline{x} \in \Omega$, où Ω est un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^d$ décrivant la géométrie du système. A $\underline{x_0}$ fixé, $H(\underline{x_0}, \theta)$ est une variable aléatoire. Inversement, à θ_0 fixé, $H(\underline{x}, \theta_0)$ est une réalisation du champ aléatoire, c'est-à-dire une fonction de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$. Un champ aléatoire est dit *vectoriel* si la quantité $H(\underline{x}, \theta)$ attachée au point $\underline{x}$ est un vecteur aléatoire. Le champ est *unidimensionnel* si $d = 1$ ou *multidimensionnel* sinon. Par souci de simplicité, nous ne considérons dans la suite que des champs scalaires multidimensionnels (qui permettent de représenter des modules d'Young, coefficients de Poisson, chargements répartis, etc.).
Le champ aléatoire est *gaussien* si n'importe quel vecteur $\{H(\underline{x}_1), \cdots, H(\underline{x}_n)\}$ est un vecteur gaussien. Un champ aléatoire gaussien est complètement défini par sa moyenne $\mu(\underline{x})$, sa variance $\sigma^2(\underline{x})$ et sa fonction d'autocovariance $C(\underline{x}, \underline{x}')$ définie par :

$$C(\underline{x}, \underline{x}') = \mathrm{Cov}[H(\underline{x}), H(\underline{x}')] \tag{2.18}$$

On note $\rho(\underline{x}, \underline{x}')$ la fonction d'autocorrélation définie par :

$$\rho(\underline{x}, \underline{x}') = \frac{C(\underline{x}, \underline{x}')}{\sigma(\underline{x})\,\sigma(\underline{x}')} \tag{2.19}$$

Un champ aléatoire est stationnaire si sa moyenne et sa variance sont constantes et si ρ ne dépend que de la différence $\underline{x}' - \underline{x}$.

II.3 Méthodes de discrétisation de champs aléatoires

II.3.1 Introduction

La discrétisation d'un champ aléatoire est l'approximation de $H(\underline{x}, \theta)$ par $\tilde{H}(\underline{x}, \theta)$ défini par un ensemble fini de variables aléatoires $\{\xi_i(\theta), i = 1, \cdots, n\}$, qui forme un vecteur aléatoire noté $\boldsymbol{\chi}$:

$$H(\underline{x}, \theta)) \approx \tilde{H}(\underline{x}, \theta) = \mathcal{F}[\underline{x}, \chi] \tag{2.20}$$

Il existe trois grands types de discrétisation [LD93, SD00, Lem05] :

- **discrétisation par valeurs ponctuelles**, où les variables aléatoires $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ sont sélectionnées parmi des valeurs de $H(\underline{x},\theta)$) en certains points $\underline{x}$;
- **discrétisation par valeurs moyennes**, où les $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ sont des intégrales pondérées de $H(\underline{x},\theta)$) sur un domaine Ω_e ;
- **méthodes de développement en séries**, où le champ est représenté exactement par une série de variables aléatoires et de fonctions spatiales déterministes.

Nous ne détaillons qu'une méthode de développement en séries, car c'est celle utilisée dans la méthode des éléments finis stochastiques [GS91] qui constitue le point de départ de ce travail.

II.3.2 Discrétisation de Karhunen-Loève

a) Définition

La méthode de discrétisation de Karhunen-Loève [Loe77, GS91] permet de décomposer tout champ aléatoire $H(\underline{x},\theta)$ en une partie déterministe (la moyenne $\mu(\underline{x})$), et en une partie aléatoire décomposée sur la base des valeurs propres λ_i et fonctions propres $\varphi_i(x)$ de la fonction d'autocovariance $C_{HH}(\underline{x},\underline{x}') = \sigma(\underline{x})\sigma(\underline{x}')\rho(\underline{x},\underline{x}')$. L'ensemble de fonctions sur lesquelles chaque réalisation du champ $H(\underline{x},\theta_0)$ est aussi développé est défini par le problème aux valeurs propres suivant :

$$\forall i = 1,\cdots \quad \int_\Omega C_{HH}(\underline{x},\underline{x}')\,\varphi_i(\underline{x}')d\Omega = \lambda_i\varphi_i(\underline{x}) \tag{2.21}$$

L'équation (2.21) est une équation intégrale de Fredholm. Le noyau $C_{HH}(\cdot,\cdot)$ étant une fonction d'autocovariance, il est borné, symétrique et défini positif. Ainsi l'ensemble des $\{\varphi_i\}$ forme une *base complète orthogonale* de l'espace des fonctions de carré sommable $\mathcal{L}^2(\Omega)$. Les valeurs propres sont réelles, positives et en nombre fini. Chaque réalisation de $H(\cdot)$ peut ainsi être développée sur cette base :

$$H(\underline{x},\theta) = \mu(\underline{x}) + \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i}\,\xi_i(\theta)\varphi_i(\underline{x}) \tag{2.22}$$

où $\{\xi_i(\theta), i = 1,\cdots\}$ sont les *coordonnées de la réalisation* du champ aléatoire vis-à-vis de l'ensemble de fonctions déterministes $\{\varphi_i\}$. En calculant $\mathrm{Cov}[H(\underline{x}), H(\underline{x}')]$ à partir de l'équation (2.22) et en imposant son égalité à $C_{HH}(\underline{x},\underline{x}')$, on a :

$$\mathrm{E}[\xi_k\,\xi_l] = \delta_{kl} \quad \text{(symbole de Kronecker)} \tag{2.23}$$

Cela signifie que la famille des$\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ forme un ensemble *orthonormal* de variables aléatoires vis-à-vis du produit scalaire.

b) Propriétés

La discrétisation de Karhunen-Loève vérifie les propriétés suivantes :

- Comme il ne peut y avoir des valeurs propres multiples (excepté éventuellement 0), il est possible de les classer en une suite décroissante convergeant vers 0. En tronquant la série (2.22) à un ordre M, on a l'approximation de Karhunen-Loève du champ aléatoire :

$$\tilde{H}(\underline{x},\theta)) = \mu(\underline{x}) + \sum_{i=1}^{M} \sqrt{\lambda_i}\,\xi_i(\theta)\varphi_i(\underline{x}) \tag{2.24}$$

- La base des fonctions propres de la fonction d'autocovariance est optimale au sens des moindres carrés pour l'erreur (intégrée sur Ω) due à la troncature à un ordre M.
- L'ensemble des variables aléatoires qui apparaissent dans l'équation (2.22) est orthonormal, c'est-à-dire qu'elles vérifient (2.23), si et seulement si les fonctions de base $\{\varphi_i(\underline{x})\}$ et les constantes λ_i sont solutions du problème aux valeurs propres (2.21).
- Comme les fonctions propres sont orthonormales, il est facile d'obtenir une expression de chaque variable aléatoire qui apparaît dans les séries :

$$\xi_i(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \int_\Omega \left[H(\underline{x},\theta) - \mu(\underline{x})\right] \varphi_i(\underline{x}) d\Omega \tag{2.25}$$

  Ainsi, quand $H(\cdot)$ est un champ gaussien, chaque variable aléatoire ξ_i est une variable aléatoire gaussienne. Il s'ensuit que les $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ forment un ensemble de v.a.g.c.r. *indépendantes*. De plus, [Loe77] montre que la discrétisation de Karhunen-Loève d'un champ gaussien est convergente presque sûrement.
- De l'équation (2.24), on tire que la variance de l'erreur obtenue après troncature à l'ordre M est définie par :

$$\mathrm{Var}[H(\underline{x}) - \tilde{H}(\underline{x})] = \sigma^2(\underline{x}) - \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \varphi_i^2(\underline{x}) = \mathrm{Var}[H(\underline{x})] - \mathrm{Var}[\tilde{H}(\underline{x})] \tag{2.26}$$

  Le membre de gauche de l'équation ci-dessus est toujours positif (car c'est la variance de l'écart $H(\underline{x}) - \tilde{H}(\underline{x})$). Ainsi la discrétisation de Karhunen-Loève *sous-estime* toujours la vraie variance du champ.

II.4 Le chaos polynomial

II.4.1 Définition

Le chaos polynomial de dimension M et d'ordre p [GS91, SD00] est défini comme l'ensemble des polynômes d'Hermite multidimensionnels en M v.a.g.c.r. $\{\xi_1, \cdots, \xi_M\}$, dont le degré ne dépasse pas p. Chacun de ces polynômes est

complètement défini par une liste de M entiers non négatifs $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_M\}$ comme suit :

$$\Psi_\alpha = \prod_{i=1}^{M} H_{\alpha_i}(\xi_i) \quad , \quad \alpha_i \geq 0 \tag{2.27}$$

où $H_q(.)$ est le q-ième polynôme d'Hermite. Notons aussi par $\partial_\alpha = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i$ le degré de la liste $\boldsymbol{\alpha}$. Le tableau II.1 présente un exemple complet de chaos polynomial à l'ordre 3 avec 3 variables aléatoires. Le nombre de polynômes de M variables de degré inférieur ou égal à p est :

$$P \ = \ \sum_{k=0}^{p} C_{M+k-1}^{k} = \frac{(M+p)!}{M!\,p!} \tag{2.28}$$

Le tableau II.2 présente le nombre de termes dans un chaos polynomial en fonction de l'ordre du chaos p et du nombre de variables M.

Tab. II.1 – Exemple de chaos polynomial pour $M = 3$ et $p = 3$

i	Ψ_i	$\mathrm{E}[\Psi_i^2]$
0	1	1
1	ξ_1	1
2	ξ_2	1
3	ξ_3	1
4	$\xi_1^2 - 1$	2
5	$\xi_1\xi_2$	1
6	$\xi_1\xi_3$	1
7	$\xi_2^2 - 1$	2
8	$\xi_2\xi_3$	1
9	$\xi_3^2 - 1$	2
10	$\xi_1^3 - 3\xi_1$	6
11	$(\xi_1^2 - 1)\xi_2$	2
12	$(\xi_1^2 - 1)\xi_3$	2
13	$(\xi_2^2 - 1)\xi_1$	2
14	$\xi_1\xi_2\xi_3$	1
15	$(\xi_3^2 - 1)\xi_1$	2
16	$\xi_2^3 - 3\xi_2$	6
17	$(\xi_2^2 - 1)\xi_3$	2
18	$(\xi_3^2 - 1)\xi_2$	2
19	$\xi_3^3 - 3\xi_3$	6

Tab. II.2 – Nombres de polynômes P dans la base du chaos. (M est le nombre de variables aléatoires de la base, p le degré maximal)

	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
$M=2$	3	6	10	15
$M=4$	5	15	35	70
$M=6$	7	28	84	210

II.5 Éléments finis stochastiques en élasticité linéaire

II.5.1 Méthode des éléments finis déterministes

Afin de fixer les notations utilisées dans la suite du mémoire, on rappelle le principe de la méthode en élasticité linéaire.

Equation d'équilibre

En élasticité linéaire, la discrétisation du système d'équations différentielles régissant l'équilibre conduit au système linéaire :

$$\boldsymbol{K} \cdot \underline{U} = \underline{F} \tag{2.29}$$

où $\underline{U}$ est le vecteur des déplacements nodaux (inconnues principales), $\boldsymbol{K}$ est la matrice de rigidité globale, et $\underline{F}$ est le vecteur des efforts nodaux (forces ponctuelles, pression, forces volumiques, contraintes initiales, déformations imposées, etc.).

Matrice de rigidité

La matrice de rigidité globale $\boldsymbol{K}$ est obtenue par assemblage des matrices de rigidité élémentaires $\boldsymbol{k}^e$:

$$\boldsymbol{K} = \bigcup_e \boldsymbol{k}^e \tag{2.30}$$

Chacune d'entre elles s'obtient classiquement de la façon suivante [ZT00] :

$$\boldsymbol{k}^e = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{B}^T \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{B}\, d\Omega_e \tag{2.31}$$

où Ω_e désigne le volume d'un élément, $\boldsymbol{B}$ est la matrice qui donne les composantes de déformations en fonction des déplacements nodaux et $\boldsymbol{D}$ est la matrice d'élasticité.

Vecteur des efforts nodaux

Le vecteur des efforts nodaux $\underline{F}$ s'écrit de la manière suivante :

$$\underline{F} = \sum_{i=1}^{N_q} q^i \underline{F}_i \tag{2.32}$$

où N_q est le nombre de chargements imposés à la structure, q^i les paramètres de chargement, et $\underline{F}_i$ le vecteur des efforts nodaux unitaires associés à chaque mode de chargement. Par exemple, dans le cas de forces ponctuelles, les composantes du vecteur $\underline{F}_i$ valent 1 aux nœuds chargés et 0 sinon.

Calcul des déformations et des contraintes

Dans chaque élément Ω_e, soit $\underline{u_e}$ le vecteur des déplacements nodaux. Par exemple, pour un élément de type QUAD4 (quadrangle linéaire) en 2 dimensions, on a :

$$\underline{u_e} = \{u_1, v_1, \cdots, u_4, v_4\} \tag{2.33}$$

où les (u_i, v_i) sont les composantes de déplacement dans chaque direction. En tout point $\underline{x}$ de Ω_e, les composantes du tenseur de déformations s'obtiennent à partir de la matrice $\boldsymbol{B}(\underline{x})$ des dérivées des fonctions de forme de l'élément :

$$\underline{\varepsilon}(\underline{x}) = \boldsymbol{B}(\underline{x}) \cdot \underline{u_e} \tag{2.34}$$

En tout point $\underline{x}$ de Ω_e, le vecteur des déplacements $\underline{u}(\underline{x})$ s'obtient à partir des fonctions de forme $\boldsymbol{N_e}(\underline{x})$:

$$\underline{u}(\underline{x}) = \boldsymbol{N_e}(\underline{x}) \cdot \underline{u_e} \tag{2.35}$$

Les composantes du tenseur des déformations s'obtiennent à partir de la matrice $\boldsymbol{B}(\underline{x})$, dérivée des fonctions de forme :

$$\underline{\varepsilon}(\underline{x}) = \boldsymbol{B}(\underline{x}) \cdot \underline{u_e} \tag{2.36}$$

En pratique, les composantes de $\underline{\varepsilon}(\underline{x})$ sont rassemblées dans un vecteur, par exemple $\{\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \varepsilon_{xy}\}$ pour les problèmes bidimensionnels.
De la même façon, les contraintes $\{\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy}\}$ se calculent par :

$$\underline{\sigma}(\underline{x}) = \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{B}(\underline{x}) \cdot \underline{u_e} \tag{2.37}$$

où $\boldsymbol{D}$ est la matrice d'élasticité.

En résumé, la méthode classique des éléments finis en élasticité permet de simuler le comportement d'une structure soumise à différents types de chargement. Pour ce faire, l'assemblage d'un système linéaire, de taille égale au nombre de degrés de liberté du problème, est nécessaire. Sa résolution permet d'avoir accès aux différents déplacements des noeuds. Des opérations de post-traitement fournissent alors les composantes des tenseurs de déformation et de contrainte.

II.5.2 Equation d'équilibre stochastique

Supposons maintenant que le module d'Young soit représenté par un champ aléatoire gaussien. La matrice d'élasticité au point $\underline{x}$ peut s'écrire sous la forme (à condition que l'on ait une corrélation parfaite entre le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν ou entre les coefficients de Lamé λ et μ) :

$$\boldsymbol{D}(\underline{x}, \theta) \equiv H(\underline{x}, \theta)\boldsymbol{D_0} \tag{2.38}$$

où $\boldsymbol{D_0}$ est une matrice déterministe constante. La discrétisation de Karhunen-Loève de $H(\cdot)$ s'écrit :

$$H(\underline{x},\theta) = \mu(\underline{x}) + \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i}\,\xi_i(\theta)\varphi_i(\underline{x}) \tag{2.39}$$

En remplaçant (2.38) et (2.39) dans (2.31), on a :

$$\boldsymbol{k}^e(\theta) = \boldsymbol{k}_0^e + \sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{k}_i^e \xi_i(\theta) \tag{2.40}$$

où $\boldsymbol{k}_0^e$ est la matrice de rigidité moyenne élémentaire et $\boldsymbol{k}_i^e$ sont des *matrices déterministes* obtenues par :

$$\boldsymbol{k}_i^e(\theta) = \sqrt{\lambda_i} \int_{\Omega_e} \varphi_i(\underline{x}) \boldsymbol{B}^T \cdot \boldsymbol{D_0} \cdot \boldsymbol{B}\, d\Omega_e \tag{2.41}$$

En assemblant ces contributions élémentaires, on obtient la partie aléatoire de l'équation d'équilibre (2.29) (en supposant que le chargement soit déterministe) :

$$\left[\boldsymbol{K_0} + \sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{K_i}\xi_i(\theta)\right] \cdot \boldsymbol{U}(\theta) = \boldsymbol{F} \tag{2.42}$$

Dans cette équation $\boldsymbol{K_0}$ est la matrice de rigidité globale calculée aux valeurs moyennes. les matrices $\boldsymbol{K_i}$ sont déterministes et obtenues par des techniques d'assemblage identiques à celles du cas déterministe.

II.5.3 Représentation de la réponse en utilisant des séries de Neumann

Le vecteur des déplacements nodaux $\boldsymbol{U}(\theta)$ est obtenu en résolvant l'équation (2.42). Une première stratégie de résolution a été proposée dans [SY88]. Elle consiste en l'utilisation d'un développement en série de Neumann de l'inverse de la matrice de rigidité stochastique pour obtenir une approximation de la réponse. L'équation (2.42) peut se réécrire :

$$\boldsymbol{K_0} \cdot \left[\boldsymbol{I} + \sum_{i=1}^{\infty} {\boldsymbol{K_0}}^{-1} \cdot \boldsymbol{K_i}\xi_i(\theta)\right] \cdot \boldsymbol{U}(\theta) = \boldsymbol{F} \tag{2.43}$$

où $\boldsymbol{I}$ est la matrice identité. L'équation (2.43) peut se réécrire :

$$\boldsymbol{U}(\theta) = \left[\boldsymbol{I} + \sum_{i=1}^{\infty} {\boldsymbol{K_0}}^{-1} \cdot \boldsymbol{K_i}\xi_i(\theta)\right]^{-1} \cdot \boldsymbol{U}^0 \quad \text{, avec} \quad \boldsymbol{U}^0 = {\boldsymbol{K_0}}^{-1} \cdot \boldsymbol{F} \tag{2.44}$$

Le développement en série de Neumann de l'équation ci-dessus est de la forme :

$$\boldsymbol{U}(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[\sum_{i=1}^{\infty} {\boldsymbol{K_0}}^{-1} \cdot \boldsymbol{K_i}\xi_i(\theta)\right]^k \cdot \boldsymbol{U}^0 \tag{2.45}$$

Les premiers termes s'écrivent :

$$\boldsymbol{U}(\theta) = \left[\boldsymbol{I} - \sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{K_0}^{-1} \cdot \boldsymbol{K_i} \xi_i(\theta) + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \boldsymbol{K_0}^{-1} \cdot \boldsymbol{K_i} \cdot \boldsymbol{K_0}^{-1} \cdot \boldsymbol{K_j}\, \xi_i(\theta)\xi_j(\theta) + \cdots \right] \cdot \boldsymbol{U}^0 \tag{2.46}$$

En tronquant la discrétisation de Karhunen-Loève et le développement en séries de Neumann, on obtient une approximation de $\boldsymbol{U}(\theta)$.

II.5.4 Représentation générale de la réponse dans $\mathcal{L}^2(\Theta, \mathcal{F}, P)$

L'équation (2.46) permet de montrer que chaque composante du déplacement aléatoire $u^i(\theta)$ peut s'écrire sous la forme d'une série polynomiale de variables gaussiennes centrées réduites $\{\xi_k(\theta)\}_{k=1}^{\infty}$. En réarrageant tous les termes à l'aide d'un seul indice j, cette représentation est de la forme :

$$u^i(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j^i \mathcal{P}_j(\{\xi_k(\theta)\}_{k=1}^{\infty}) \tag{2.47}$$

où $\mathcal{P}_0 \equiv 1$ et $\mathcal{P}_j(\{\xi_k(\theta)\}_{k=1}^{\infty})$ sont des polynômes de variables gaussiennes centrées réduites, de forme générale :

$$\mathcal{P}_j(\{\xi_k(\theta)\}_{k=1}^{\infty}) = \xi_{i_1}^{\alpha_1} \xi_{i_2}^{\alpha_2} \cdots \xi_{i_p}^{\alpha_p} \tag{2.48}$$

L'ensemble des $\{\mathcal{P}_j\}_{j=0}^{\infty}$ dans l'équation (2.48) forme une *base* de l'espace des variables aléatoires $\mathcal{L}^2(\Theta, \mathcal{F}, P)$, et les coefficients u_j^i peuvent être interprétés comme les coordonnées de $u^i(\theta)$ dans cette base. La base définie ci-dessus n'est pas orthogonale vis-à-vis du produit scalaire de l'équation (2.8) sur $\mathcal{L}^2(\Theta, \mathcal{F}, P)$. Le *chaos polynomial* présenté à la section II.4 est une base orthogonale de $\mathcal{L}^2(\Theta, \mathcal{F}, P)$. On peut donc supposer que chaque variable aléatoire $u(\theta)$ qui appartient à $\mathcal{L}^2(\Theta, \mathcal{F}, P)$ peut s'écrire sous la forme :

$$u(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j \Psi_j(\theta) \tag{2.49}$$

les $\{\Psi_j(\theta)\}_{j=0}^{\infty}$ ont été définis plus haut (Eq.(2.27)). On peut donc écrire le développement du vecteur des déplacements nodaux sous la forme :

$$\boldsymbol{U}(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{U}_j \Psi_j(\theta) \tag{2.50}$$

Les $\boldsymbol{U}_j$ sont des vecteurs *déterministes* dont la taille est le nombre de degrés de liberté du système N_{ddl}. Notons que le premier terme $\boldsymbol{U}_0$ est différent de celui obtenu à l'aide des séries de Neumann.

II.5.5 Obtention des coefficients par la méthode de Galerkin

En notant $\xi_0(\theta) \equiv 1$ et en substituant (2.50) dans (2.42), on obtient :

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{K}_i \xi_i(\theta)\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{U}_j \Psi_j(\theta)\right) - \boldsymbol{F} = 0 \tag{2.51}$$

Les séries de l'équation (2.51) doivent être tronquées pour pouvoir résoudre le problème. Le développement de la matrice de rigidité obtenu par la discrétisation de Karhunen-Loève est tronqué à $(M+1)$ termes et le vecteur déplacement à P termes. Ainsi, le résidu correspondant à cette troncature dans (2.51) s'écrit :

$$\epsilon_{M,P} = \sum_{i=0}^{M} \sum_{j=0}^{P-1} \boldsymbol{K}_i \cdot \boldsymbol{U}_j \xi_i(\theta) \Psi_j(\theta) - \boldsymbol{F} \tag{2.52}$$

La meilleure approximation de la solution exacte $\boldsymbol{U}(\theta)$ dans l'espace $\mathcal{H}_P$ décrit par $\{\Psi_k\}_{k=0}^{P-1}$ est obtenu en minimisant le résidu au sens des moindres carrés. Dans l'espace de Hilbert $\mathcal{L}^2(\Theta, \mathcal{F}, P)$, la solution du problème correspond à la projection de $\boldsymbol{U}(\theta)$ sur $\mathcal{H}_P$. Cela implique l'orthogonalité entre le résidu et $\mathcal{H}_P$ dans $\mathcal{L}^2(\Theta, \mathcal{F}, P)$, ce qui s'écrit :

$$\mathrm{E}[\epsilon_{M,P} \cdot \Psi_k] = 0 \quad k = 0, \cdots, P-1 \tag{2.53}$$

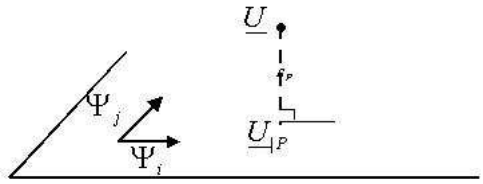


Fig. II.1 – Projection sur l'espace d'Hilbert de l'équation d'équilibre

Posons :

$$c_{ijk} = \mathrm{E}[\xi_i \Psi_j \Psi_k] \tag{2.54}$$

$$\boldsymbol{F}_k = \mathrm{E}[\Psi_k \boldsymbol{F}] \tag{2.55}$$

On remarque que $\boldsymbol{F}_k$ est nul pour tout $k > 0$ dans le cas d'un chargement déterministe. En utilisant (2.52), l'équation (2.53) peut s'écrire :

$$\sum_{i=0}^{M} \sum_{j=0}^{P-1} c_{ijk}\, \boldsymbol{K}_i \cdot \boldsymbol{U}_j = \boldsymbol{F}_k \quad k = 0, \cdots, P-1 \tag{2.56}$$

Posons :

$$\boldsymbol{K}_{jk} = \sum_{i=0}^{M} c_{ijk} \boldsymbol{K}_i \tag{2.57}$$

L'équation 2.56 se réécrit :

$$\sum_{j=0}^{P-1} \boldsymbol{K}_{jk} \cdot \boldsymbol{U}_j = \boldsymbol{F}_k \quad k = 0, \cdots, P-1 \tag{2.58}$$

Dans les équations ci-dessus, chaque $\boldsymbol{U}_j$ est un vecteur de dimension N_{ddl}, et chaque $\boldsymbol{K}_{jk}$ est une matrice de taille $N_{ddl} \times N_{ddl}$. On peut réécrire l'équation (2.58) sous la forme d'un système linéaire de taille $N_{ddl} \cdot P \times N_{ddl} \cdot P$:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{K}_{00} & \cdots & \boldsymbol{K}_{0,P-1} \\ \boldsymbol{K}_{10} & \cdots & \boldsymbol{K}_{1,P-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{K}_{P-1,0} & \cdots & \boldsymbol{K}_{P-1,P-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_0 \\ \boldsymbol{U}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{U}_{P-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{F}_0 \\ \boldsymbol{F}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{F}_{P-1} \end{pmatrix} \tag{2.59}$$

où encore, en introduisant des notations sans ambiguité :

$$\boldsymbol{\mathcal{K}} \cdot \underline{\mathcal{U}} = \underline{\mathcal{F}} \tag{2.60}$$

Ce système, dont la taille est le produit du nombre de degrés de liberté N_{ddl} du modèle aux éléments finis déterministe (*i.e.* la taille de chaque $\underline{U}_j$) par l'ordre du développement P, donne les vecteurs $\{\underline{U}_0, \cdots, \underline{U}_{P-1}\}$. Il va être résolu à l'aide des méthodes que nous allons détailler dans le paragraphe suivant. Les blocs diagonaux de la matrice $\boldsymbol{\mathcal{K}}$ représentent la contribution due à la valeur moyenne. Plus les fluctuations des propriétés matérielles sont faibles, plus cette matrice $\boldsymbol{\mathcal{K}}$ est diagonale par blocs. La figure II.2 présente l'allure de la matrice $\boldsymbol{\mathcal{K}}$, chaque bloc étant une matrice carrée de taille N_{ddl} à structure bande. On remarque bien que cette matrice est symétrique. Elle a également toutes les propriétés d'une matrice de rigidité habituelle, elle est notamment définie positive. Aussi la résolution de l'équation (2.59) peut être améliorée grâce à l'utilisation d'un algorithme adapté à la structure creuse de cette matrice.

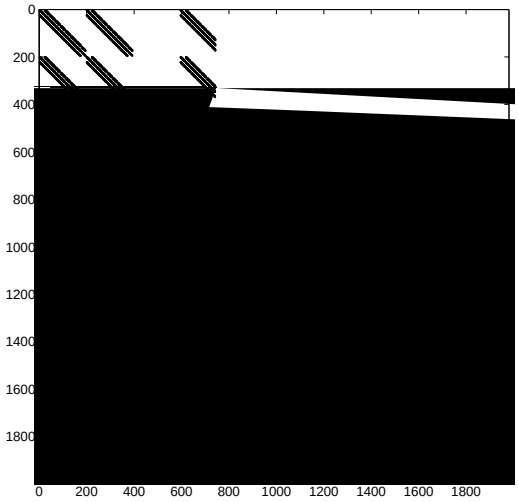
En résolvant ce système, on obtient la meilleure approximation de $\boldsymbol{U}(\theta)$ sur le sous-espace $\mathcal{H}_P$ engendré par $\{\Psi_k\}_{k=0}^{P-1}$, soit :

$$\boldsymbol{U}(\theta) = \sum_{j=0}^{P-1} \boldsymbol{U}_j \Psi_j(\theta) \tag{2.61}$$

II.5.6 Stratégies de résolution

Il existe principalement deux méthodes pour résoudre le système linéaire (2.60) : la méthode directe et la méthode hiérarchique.

Méthode directe Pour résoudre le système (2.60), on peut utiliser la factorisation de Cholesky, à cause de la structure particulière de la matrice $\boldsymbol{\mathcal{K}}$. Cette factorisation


0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
1800
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
1800

- soit on résout le système (2.61) associé à un certain ordre p par la méthode directe et on utilise ensuite l'approche hiérarchique pour calculer les coefficients associés à l'ordre $(p+1)$ les uns après les autres ;
- soit on résout le système (2.61) associé à un certain ordre p et ensuite on calcule tous les coefficients de l'ordre supérieur $(p+1)$ en même temps. La méthode s'applique alors *ordre par ordre*.

II.6 Utilisations et évolutions de cette méthode

Depuis la publication du livre de Ghanem et Spanos [GS91], de nombreux chercheurs se sont intéressés à la méthode des éléments finis stochastiques spectraux et ont participé à son développement dans différents domaines. Initialement développée dans le cadre de la mécanique linéaire [GS91, Sch97, Sch01], la méthode a été ensuite étendue à des problèmes de thermique [Gha99c, XK02, NZ02] ; de géotechnique [GB96, GG02, CLG03] ; d'analyse harmonique [DTLJ01, Van03] ; de mécanique des fluides [LKNG01, LRN$^+$02] ; sur des assemblages soudés [BC04]. Des améliorations ont également été apportées à la méthode, comme l'utilisation de champs aléatoires lognormaux (à la place des champs gaussiens) et de plusieurs champs aléatoires [Gha99a, Gha99c, Gha99b]. Différentes méthodes de résolution performantes du système (2.60) ont également été proposées par [GK96, AH99, MHR03, EEOS05, KM05]. Des études ont également été faîtes en choisissant une autre base de projection comme des ondelettes par exemple [LKNG04]. La réponse est projetée alors sur l'espace des processus constants par morceaux. Cela permet de représenter des modèles ayant des discontinuités.
On trouvera une revue critique et une synthèse de ces contributions dans [SD00] et plus récement dans [Kee04]. Des tentatives pour résoudre des problèmes en non linéaire ont été faites par [AH99, AH01, Kee04]. Le système est alors résolu par des méthodes itératives. Des travaux similaires avec en plus une discussion sur la convergence et sur les estimateurs d'erreur ont été abordés dans [BC02, DBO01]. [DNP$^+$04] utilise une autre voie pour introduire des non linéarités dans la MEFSS : lorsque l'aléa intervient au niveau d'une fonction non linéaire, les auteurs développent cette fonction sur la base du chaos polynomial.

II.7 Limitations et conclusions

La méthode des éléments finis stochastiques spectraux présentée dans ce chapitre permet de résoudre des problèmes de mécanique élastique linéaire, dans lesquels l'aléa porte sur un paramètre matériau ou de chargement et est représenté par un champ aléatoire gaussien ou lognormal. Ce champ aléatoire doit être décomposé sur

la base du chaos polynomial par la discrétisation de Karhunen-Loève.
D'un autre coté, les méthodes de fiabilité des structures [DM96], dont on donne un aperçu dans l'annexe (C) permettent depuis de nombreuses années de traiter des problèmes dont les paramètres d'entrée sont modélisés par des variables aléatoires en nombre et de type quelconque. Les problèmes non linéaires (grandes déformations, élasto-plasticité) peuvent être également traités sans difficulté conceptuelle supplémentaire.
Ce constat est le point de départ de ce travail de thèse : comment appliquer une représentation par chaos polynomial à un système mécanique complexe, éventuellement non linéaire, et dont la modélisation probabiliste des paramètres d'entrée est générale ? La figure III.17 présente un schéma récapitulatif de la méthode des éléments finis stochastiques spectraux. Le chapitre III présente les premiers éléments de réponse à cette question.

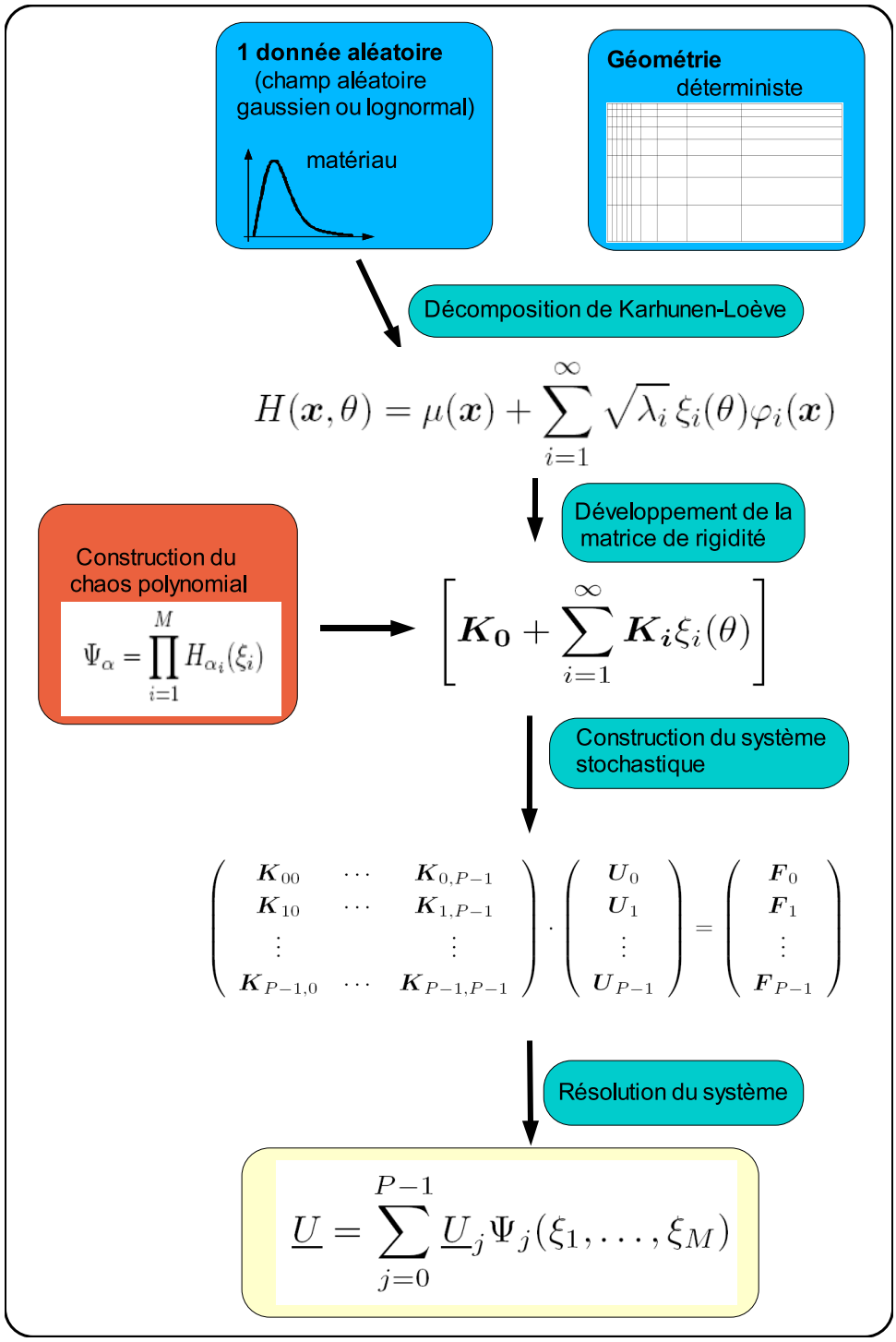


Fig. II.3 – Schéma bilan du chapitre 2 : Différentes étapes de la méthode des éléments finis stochastiques spectraux

Chapitre -III-

Extension de la méthode des éléments finis stochastiques

Sommaire

III.1 Introduction 25

III.2 Approximation de variables aléatoires par des polynômes de gaussiennes 25

III.2.1 Introduction 25

III.2.2 Méthode de projection 25

III.2.3 Méthode de régression 30

III.2.4 Applications 31

III.2.5 Estimateurs d'erreurs 39

III.2.6 Développement de fonctions de variables aléatoires 46

III.2.7 Développements de plusieurs variables aléatoires indépendantes 47

III.2.8 Conclusion 48

III.3 Eléments finis stochastiques en élasticité linéaire 49

III.3.1 Introduction 49

III.3.2 Introduction de propriétés matériaux aléatoires 49

III.3.3 Introduction de chargements aléatoires 52

III.3.4 Obtention du système linéaire 53

III.3.5 Stratégies de résolution 54

III.3.6 Développement de la réponse du système 54

III.3.7 Conclusion 56

III.4 Post-traitements 56

III.4.1 Introduction 56

III.4.2 Calcul des moments statistiques 57

III.4.3 Analyse de fiabilité 57
III.4.4 Calcul de la densité de probabilité 58
III.4.5 Conclusions 61
III.5 Application : Tassement d'une fondation 61
III.5.1 Position du problème 62
III.5.2 Résultats 62
III.5.3 Conclusion 69
III.6 Conclusions et limitations 69

III.1 Introduction

La méthode des éléments finis stochastiques spectraux (MEFSS) développée par *Ghanem et al.* permet de prendre en compte la variabilité spatiale d'une propriété matériau (en général le module d' Young) ou d'un chargement. La sortie du modèle est le développement de la réponse sur la base du chaos polynomial. L'objectif de ce chapitre est d'étendre la représentation sur le chaos polynomial au cas de paramètres matériau et de chargements représentés par des variables aléatoires de type quelconque et en nombre quelconque. Pour ce faire, nous avons besoin d'approximer les variables aléatoires d'entrée sur la base du chaos polynomial, et de modifier l'écriture de l'équilibre stochastique. Les différents post-traitements possibles à partir du développement de la réponse sont ensuite présentés. Les développements sont illustrés sur un exemple d'application en mécanique élastique linéaire.

III.2 Approximation de variables aléatoires par des polynômes de gaussiennes

III.2.1 Introduction

Cette section présente deux méthodes permettant d'approximer des variables aléatoires de n'importe quel type par des polynômes de variables aléatoires gaussiennes centrées réduites. La première approche est une méthode de projection de la variable sur la base des polynômes considérée. La seconde méthode est une méthode de régression (ou de minimisation au sens des moindres carrés entre la variable à approximer et l'approximation). On présente également trois estimateurs d'erreur permettant d'évaluer la précision de l'approximation. Enfin, nous montrons comment sont développées des fonctions de variables aléatoires d'une part et plusieurs variables aléatoires conjointement d'autre part.

III.2.2 Méthode de projection

Principe

Cette méthode, présentée dans [PPS02, XK02, Pho03], utilise l'orthogonalité des polynômes d'Hermite par rapport à la mesure de probabilité gaussienne. Dans l'espace de probabilité $\mathcal{L}^2(\Theta, F, P)$, toute variable aléatoire peut s'écrire sous la forme :

$$X = \sum_{i=0}^{\infty} a_i H_i(\xi) \tag{3.1}$$

où ξ est une variable gaussienne centrée réduite et les $\{a_i, i = 0, \cdots, \infty\}$ les coefficients à déterminer. En multipliant (3.1) par $H_i(\xi)$ et en prenant l'espérance,

on obtient :

$$\mathrm{E}[X\, H_i(\xi)] = a_i \mathrm{E}[H_i^2(\xi)] \tag{3.2}$$

où l'on a $\mathrm{E}[H_i^2(\xi)] = i!$.

Soit F_X la fonction de répartition de la variable à approximer, Φ la fonction de répartition d'une gaussienne centrée réduite. En utilisant la transformation isoprobabiliste $X \to \xi$ vérifiant $F_X(x) = \Phi(\xi)$, on peut écrire :

$$X = F_X^{-1}(\Phi(\xi)) \tag{3.3}$$

Le premier membre de (3.2) se réécrit alors :

$$\mathrm{E}[X\, H_i] = \int_{\mathbb{R}} F_X^{-1}(\Phi(t)) H_i(t) \varphi(t) dt \tag{3.4}$$

On obtient finalement :

$$a_i = \frac{1}{i!} \int_{\mathbb{R}} F_X^{-1}(\Phi(t)) H_i(t) \varphi(t) dt \tag{3.5}$$

Résultats analytiques

Lorsque X suit une loi gaussienne de moyenne μ et d'écart-type σ, le calcul des coefficients du développement (3.1) est immédiat :

$$\begin{aligned} a_0 &= \mu \\ a_1 &= \sigma \\ a_i &= 0 \quad \text{si} \quad i > 1 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Lorsque X suit une loi lognormale de paramètres (λ, ζ), les coefficients a_i peuvent être calculés de manière analytique (voir détails dans [SD00]) :

$$a_i = \frac{\zeta^i e^{\lambda + \frac{1}{2}\zeta^2}}{i!} \quad i \geq 0 \tag{3.7}$$

Lorsque X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$, les coefficients a_i peuvent être calculés de manière analytique (voir détails dans [FG04]) :

$$\begin{aligned} a_0 &= \tfrac{a+b}{2} \\ a_{2i} &= 0 \\ a_{2i+1} &= \tfrac{(-1)^i (b-a)}{2^{2i+1} \sqrt{\pi} i! (2i+1)} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Dans les autres cas, une évaluation numérique de l'intégrale (3.5) est nécessaire. Elle peut se faire par simulation de Monte Carlo (*c.f.* Annexe B) ou par quadratures, présentée ci-après. La seule erreur possible dans le calcul des coefficients est donc d'origine numérique. En pratique, la série (3.1) est tronquée à un certain ordre en fonction de la précision souhaitée.

Méthode de quadratures de Gauss

La méthode de quadratures de Gauss consiste à calculer de façon approchée une intégrale de la forme :

$$I = \int_a^b f(x)W(x)dx$$

où f est une fonction régulière sur le domaine $[a, b]$ et $W(x)$, dite fonction poids, est une fonction positive ou nulle sur (a, b) pouvant présenter des singularités sans pour autant altérer la convergence de l'intégrale I. Dans le cas général, les singularités se présentent aux bornes a ou b du domaine, lequel peut être fini ou infini selon le cas.

Le principe de la méthode de quadratures de Gauss s'énonce comme suit : étant donné un entier N, on peut trouver une famille de N réels positifs ω_j appelés *poids* et N réels x_j appelés *points d'intégration*, telle que l'intégrale I soit approchée par l'expression suivante :

$$I \simeq J = \sum_{j=1}^{N} w_j f(x_j) \tag{3.9}$$

Pour déterminer les points x_j et les poids w_j qui leur sont associés, on requiert que l'égalité de I et J soit rigoureuse pour tous les polynômes d'ordre inférieur à $2N-1$.

L'idée de la méthode de quadratures vient de Gauss en 1814. En 1826, Jacobi retrouva les résultats de Gauss à l'aide de la théorie des polynômes orthogonaux. Le traitement systématique de fonctions poids arbitraires $W(x)$ utilisant des polynômes orthogonaux est en grande partie dû à Christoffel en 1877.

Pour le calcul des points et poids d'intégration nous devons définir la notion d'orthogonalité pour une famille de polynômes.

Définition. Une famille des polynômes $\{P_0(x), P_1(x), \cdots, P_N(x)\}$ est orthogonale sur l'intervalle $[a, b]$ vis-à-vis de la fonction de poids W, si :

- le polynôme P_j est de degré j,
- le coefficient de x^j dans P_j est 1,
- le produit scalaire $< P_i, P_j >= \int_a^b P_i(x)P_j(x)W(x)dx = 0$ pour $i \neq j$ et $i, j \in \{1, \cdots, N\}$.

La famille de polynômes définis par la relation de récurrence suivante est une famille orthogonale.

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x - \frac{< xP_0, P_0 >}{< P_0, P_0 >} \\ P_{j+1}(x) &= (x - a_j)\, P_j(x) - b_j P_{j-1}(x) \quad , \quad j > 1 \end{aligned} \tag{3.10}$$

où l'on a posé

$$a_j = \frac{< xP_j, P_j >}{< P_j, P_j >} \quad \text{et} \quad b_j = \frac{< P_j, P_j >}{< P_{j-1}, P_{j-1} >} \tag{3.11}$$

Calcul des points d'intégration. Considérons un polynôme quelconque $Q_{N-1}(x)$ d'ordre $N-1$. Il peut s'exprimer dans la base des polynômes $\{P_1(x), \cdots, P_N(x)\}$ sous la forme :

$$Q_{N-1}(x) = \sum_{j=0}^{N-1} A_j P_j(x) \tag{3.12}$$

Le produit scalaire de $Q_{N-1}(x)$ avec $P_N(x)$ est nul, ce qui s'écrit :

$$\int_a^b Q_{N-1}(x) P_N(x) W(x) dx = \sum_{j=0}^{N-1} A_j \int_a^b P_j(x) P_N(x) W(x) dx = 0 \tag{3.13}$$

Or d'après l'équation (3.9), le membre de gauche de l'équation (3.13) s'écrit :

$$\int_a^b Q_{N-1}(x) P_N(x) W(x) dx = \sum_{j=1}^{N} w_j Q_{N-1}(x_j) P_N(x_j) = 0 \tag{3.14}$$

Cette égalité doit être vérifiée pour n'importe quel polynôme $Q_{N-1}(x)$, dont le degré est inférieur ou égal à $N-1$. Comme les poids d'intégration w_j sont strictement positifs, on conclut que $P_N(x_j) = 0$ pour $j \in \{1, \cdots, N\}$. Les points d'intégration x_j sont donc les N racines du polynôme $P_N(x)$.

Calcul des poids d'intégration. Comme le polynôme $P_N(x)$ a N racines réelles différentes, on peut l'écrire sous la forme :

$$P_N(x) = \prod_{k=1}^{N} (x - x_k) \tag{3.15}$$

Considérons le polynôme $Q_{Nk}(x)$ défini comme étant :

$$Q_{Nk}(x) = \frac{P_N(x)}{x - x_k} = \prod_{i=1, i\neq k}^{N} (x - x_i) \tag{3.16}$$

Ainsi,

$$\int_a^b Q_{Nk}(x) W(x) dx = \sum_{j=1}^{N} w_j Q_{Nk}(x_j) = \sum_{j=1}^{n} w_j \prod_{i=1, i\neq k}^{N} (x_j - x_i) = w_k Q_{Nk}(x_k) \tag{3.17}$$

d'où :

$$w_k = \frac{1}{Q_{Nk}(x_k)} \int_a^b \frac{P_N(x)}{x - x_k} W(x) dx \tag{3.18}$$

On remarque que x_k est une racine de $P_{N-1}(x) - P_{N-1}(x_k)$, d'où $\dfrac{P_{N-1}(x) - P_{N-1}(x_k)}{x - x_k}$ est un polynôme d'ordre $N-2$. On en déduit que $< P_N(x), \dfrac{P_{N-1}(x) - P_{N-1}(x_k)}{x - x_k} >= 0$. On a alors :

$$\int_a^b \frac{P_N(x) P_{N-1}(x)}{x - x_k} W(x) dx = P_{N-1}(x_k) \int_a^b \frac{P_N(x)}{x - x_k} W(x) dx \tag{3.19}$$

$\frac{P_N(x)}{x-x_k}$ est un polynôme d'ordre $N-1$, on peut l'écrire comme une combinaison linéaire de polynômes orthogonaux. Dans ce développement, le facteur associé à $P_{N-1}(x)$ est 1 puisque le coefficient du monôme de degré $N-1$ de $\frac{P_N(x)}{x-x_k}$ est 1. Il vient :

$$\frac{P_N(x)}{x-x_k} = P_{N-1}(x) + \sum_{j=0}^{N-2} \alpha_j P_j(x) \tag{3.20}$$

Par orthogonalité, on obtient :

$$\int_a^b \frac{P_N(x)}{x-x_k} P_{N-1}(x) W(x) dx = < P_{N-1}(x) + \sum_{j=0}^{N-2} \alpha_j P_j(x), P_{N-1}(x) > = < P_{N-1}(x), P_{N-1}(x) > \tag{3.21}$$

En reportant (3.21) dans (3.19), puis dans (3.18), et en remarquant que $Q_{Nk}(x_k) = P'_N(x_k)$, il vient finalement :

$$w_k = \frac{< P_{N-1}, P_{N-1} >}{P'_N(x_k) P_{N-1}(x_k)} \tag{3.22}$$

Application au développement des variables aléatoires

Le numérateur de (3.5) peut être calculé en utilisant l'intégration numérique par quadratures associée à la fonction de poids $\varphi(t)$. Les polynômes orthogonauxs vis-à-vis de cette fonction étant les polynômes d'Hermite, c'est à partir de leurs racines que sont calculés les points et poids d'intégration. On a donc :

$$a_i \approx \frac{1}{i!} \sum_{j=1}^{N} w_j F_X^{-1}(\Phi(x_j)) H_i(x_j) \tag{3.23}$$

Le tableau III.1 donne les schémas d'intégration jusqu'à l'ordre 4.

Tab. III.1 – Schémas d'intégration pour les quadratures de Gauss jusqu'à l'ordre 4

Ordre	Poids	Points
1	$w_1^{(1)} = 1$	$x_1^{(1)} = 1$
2	$w_1^{(2)} = 1/2$	$x_1^{(2)} = -1$
2	$w_2^{(2)} = 1/2$	$x_2^{(2)} = 1$
3	$w_1^{(3)} = 1/6$	$x_1^{(3)} = -\sqrt{3}$
3	$w_2^{(3)} = 2/6$	$x_2^{(3)} = 0$
3	$w_3^{(3)} = 1/6$	$x_3^{(3)} = \sqrt{3}$
4	$w_1^{(4)} = 0,0459$	$x_1^{(4)} = -\sqrt{3+\sqrt{6}}$
4	$w_2^{(4)} = 0,4541$	$x_2^{(4)} = -\sqrt{3-\sqrt{6}}$
4	$w_3^{(4)} = 0,4541$	$x_3^{(4)} = \sqrt{3-\sqrt{6}}$
4	$w_4^{(4)} = 0,0459$	$x_4^{(4)} = \sqrt{3+\sqrt{6}}$

III.2.3 Méthode de régression

Cette méthode est utilisée par [MHR03] d'après les travaux de [Isu99]. Contrairement à la méthode précédente, elle ne nécessite pas l'évaluation d'une intégrale. On souhaite approximer une variable aléatoire X de loi connue par la variable $\tilde{X}$ définie *a priori* comme suit :

$$\tilde{X}(\xi) = \sum_{j=0}^{p} a_j H_j(\xi) \tag{3.24}$$

p étant l'ordre d'approximation voulu et ξ une variable aléatoire gaussienne centrée réduite.

On se donne n réalisations de la variable ξ, soit $\{\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(n)}\}$. On en déduit par transformation isoprobabiliste les n valeurs de X correspondantes $\{X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}\}$: $X^{(j)} = F_X^{(-1)}(\Phi(\xi^{(j)})), j = 1, \cdots, n$. A l'aide de la méthode des moindres carrés, on minimise l'écart quadratique $\triangle X$ entre X et $\tilde{X}$ défini par :

$$\triangle X = \sum_{i=1}^{n} (X^{(i)} - \tilde{X}^{(i)})^2 \tag{3.25}$$

Cela équivaut à minimiser par rapport aux coefficients $\{a_j, j = 0, \cdots, p\}$ l'expression :

$$\triangle X = \sum_{i=1}^{n} \left(X^{(i)} - \sum_{j=0}^{p} a_j H_j(\xi^{(i)}) \right)^2 \tag{3.26}$$

Le minimum est obtenu pour des valeurs de a_j vérifiant :

$$\frac{\partial \triangle X}{\partial a_k} = 0 \quad \forall k \in \{0, \cdots, p\} \tag{3.27}$$

soit

$$\sum_{i=1}^{n} H_k(\xi^{(i)}) \left(X^{(i)} - \sum_{j=0}^{p} a_j H_j(\xi^{(i)}) \right) = 0 \quad \forall k \in \{0, \cdots, p\} \tag{3.28}$$

Finalement, le système à résoudre est le suivant :

$$\sum_{j=0}^{p} a_j \left[\sum_{i=1}^{n} H_k(\xi^{(i)}) H_j(\xi^{(i)}) \right] = \sum_{i=1}^{n} X^{(i)} H_k(\xi^{(i)}) \quad \forall k \in \{0, \cdots, p\} \tag{3.29}$$

Ceci s'écrit sous forme matricielle de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} H_0(\xi^{(i)}) H_0(\xi^{(i)}) & \cdots & \sum_{i=1}^{n} H_0(\xi^{(i)}) H_p(\xi^{(i)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} H_p(\xi^{(i)}) H_0(\xi^{(i)}) & \cdots & \sum_{i=1}^{n} H_p(\xi^{(i)}) H_p(\xi^{(i)}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} X^{(i)} H_0(\xi^{(i)}) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} X^{(i)} H_p(\xi^{(i)}) \end{pmatrix} \tag{3.30}$$

La résolution de ce système permet d'obtenir les coefficients $\{a_j, j = 0, \cdots, p\}$. La méthode de régression, de par sa construction, optimise les coefficients en tenant compte de la troncature. Les coefficients sont donc calculés au mieux, au sens des moindres carrés, pour la troncature considérée.
En pratique, les réalisations de la variable ξ sont régulièrement réparties sur le domaine de définition de la variable X.

III.2.4 Applications

Afin de pouvoir tester l'efficacité de ces deux méthodes, nous allons tracer les densités de probabilité théoriques de quelques lois ainsi que celles obtenues après approximation. Une première manière d'apprécier la qualité de l'approximation est la comparaison *visuelle* des courbes. Pour tracer la densité de probabilité d'une variable aléatoire qui s'écrit $\tilde{X}(\xi) = \sum_{i=1}^{P} a_i H_i(\xi)$, une méthode s'appuyant sur des analyses fiabilistes successives (*cf.* Annexe III.4.4) est utilisée. Le calcul des coefficients par les formules (3.7) et (3.30) est effectué à l'aide de routines programmées dans l'environnement Matlab [Mat01]. D'autres méthodes d'obtention et de tracé de densités de probabilité sont détaillées dans la section III.4.4.

a) Loi lognormale

Soit X une variable aléatoire de loi lognormale de moyenne 2 et de coefficient de variation 30%. Ses paramètres (*i.e.* la moyenne λ et l'écart-type ζ de la gaussienne $\ln X$) valent respectivement $0,6501$ et $0,2936$. Les coefficients a_i théoriques (équation (3.7)) et ceux donnés par les deux méthodes sont rassemblés dans le tableau III.2 pour les ordres 3 et 4 du développement. Le tableau III.3 présente les quatre premiers moments statistiques de X obtenus de manière théorique et par les méthodes d'approximation.
Ces tableaux permettent de montrer que pour la méthode de projection, il faut au moins 3 points d'intégration pour obtenir correctement la moyenne (donc le coefficient a_0) et l'écart-type. En prenant 4 points d'intégration, les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement sont également bien calculés ; avec 4 points d'intégration, on calcule correctement les 4 premiers coefficients du développement de X. La méthode de régression à l'ordre 3 permet de calculer correctement les 4 premiers coefficients du développement de X ainsi que les 3 premiers moments statistiques (pour le coefficient d'aplatissement, on a une erreur relative de 1,6% avec le coefficient d'aplatissement théorique). La méthode de régression à l'ordre 4 permet de bien calculer les 5 premiers coefficients ainsi que les 4 premiers moments statistiques. La figure III.1 présente les densités de probabilités de X théoriques ainsi que celles obtenues par les méthodes de projection et de

régression à l'ordre 3. On remarque que les densités de probabilités sont confondues dès l'ordre 3, ce qui laisse supposer que les coefficients d'ordre élevé ont une faible importance.

Tab. III.2 – Coefficients a_i calculés par les deux méthodes d'approximation dans le cas d'une loi lognormale

Méthode	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
Théorique	2,0000	0,5871	0,0862	0,0084	0,0006
Projection 2 points	3,9976	1,1409	0,0000	-0,3803	-0,3331
Projection 3 points	2,0000	0,5869	0,0843	$-4,34.10^{-17}$	-0,0211
Projection 4 points	2,0000	0,5871	0,0861	0,0082	$-3,35.10^{-17}$
Régression (ordre 3)	2,0000	0,5871	0,0862	0,0083	-
Régression (ordre 4)	2,0000	0,5871	0,0862	0,0084	0,0006

Tab. III.3 – Moments calculés à partir des coefficients a_i par les deux méthodes d'approximation dans le cas d'une loi lognormale

Moments	moyenne	écart-type	asymétrie	aplatissement
Théorique	2,0000	0,6000	0,9270	4,5659
Projection 2 points	3,9976	1,4729	0,0000	5,8800
Projection 3 points	2,0000	0,5989	0,8337	3,9330
Projection 4 points	2,0000	0,5999	0,9214	4,4903
Régression (ordre 3)	2,0000	0,5999	0,9216	4,4910
Régression (ordre 4)	2,0000	0,5999	0,9268	4,5606

b) Loi de Weibull

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Weibull, dont la densité de probabilité est définie par l'équation (3.31) avec les paramètres : $\delta = 0,7$ et $\beta = 3$.

$$f_X(x) = \delta\beta x^{\beta-1} e^{-\delta x^{\beta}} \quad , x \geq 0 \tag{3.31}$$

La moyenne de X est de 1,0057, l'écart-type de 0,3655, et le coefficient de variation de 36,34%. Les coefficients a_i donnés par les deux méthodes sont rassemblés dans le tableau III.4 pour les ordres 3 et 4. Le tableau III.5 présente les 4 premiers moments statistiques de X obtenus théoriquement et par les méthodes d'approximation de projection (à l'ordre 3 avec différents nombres de points d'intégration) et de régression (pour différents ordres).
D'après les figures III.2 et III.3, on remarque que la meilleure méthode d'approximation est obtenue avec la méthode de régression à l'ordre 4. On note également qu'à l'ordre 3, les deux méthodes donnent des résultats équivalents. En

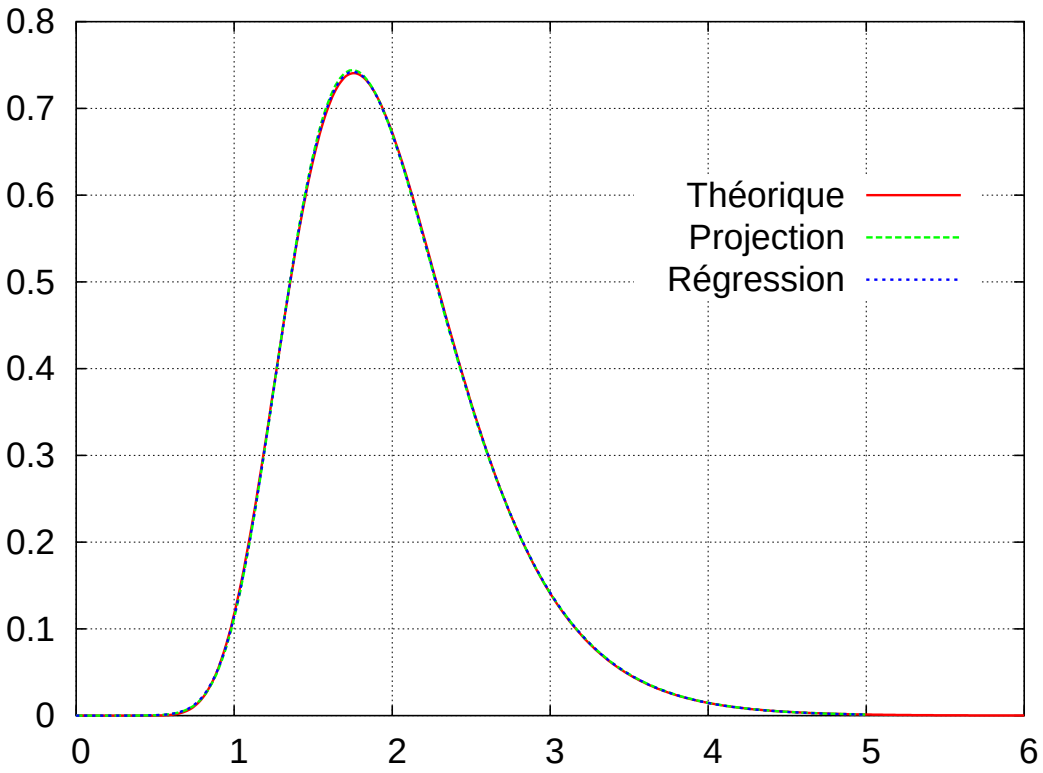


Fig. III.1 – Densités de probabilité théorique et approchées à l'ordre 3 pour la loi lognormale

effet, les coefficients du développement à l'ordre 3 obtenus par les deux méthodes d'approximation sont quasiment égaux. Le tableau III.5 confirme le résultat obtenu pour la loi lognormale, à savoir que 2 points d'intégration ne sont pas suffisants pour obtenir de bons résultats (ce qui est normal étant donné que l'on veut intégrer un polynôme d'ordre 3). En revanche 3 points d'intégration suffisent pour calculer les 3 premiers moments de X. Pour avoir une bonne précision sur le coefficient d'aplatissement, il faut au moins avoir 4 points d'intégration. La méthode de régression donne de bons résultats dès l'ordre 3 sur les quatre premiers moments statistiques.

Tab. III.4 – Coefficients a_i calculés par les deux méthodes d'approximation dans le cas d'une loi de Weibull

Méthode	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
Projection	1,0057	0,3649	0,0115	-0,0056	0,0006
Régression (ordre 3)	1,0041	0,3645	0,0130	-0,0056	-
Régression (ordre 4)	1,0057	0,3646	0,0118	-0,0057	0,0007

Tab. III.5 – Moments calculés à partir des coefficients a_i par les deux méthodes d'approximation dans le cas d'une loi de Weibull

Moments	moyenne	écart-type	asymétrie	aplatissement
Théorique	1,0057	0,3655	0,1681	2,7295
Projection 2 points	2,0076	0,9722	0,0000	5,8800
Projection 3 points	1,0060	0,3648	0,1525	3,0310
Projection 4 points	1,0057	0,3654	0,1780	2,7071
Régression (ordre 3)	1,0057	0,3654	0,1780	2,7072
Régression (ordre 4)	1,0057	0,3656	0,1660	2,7329

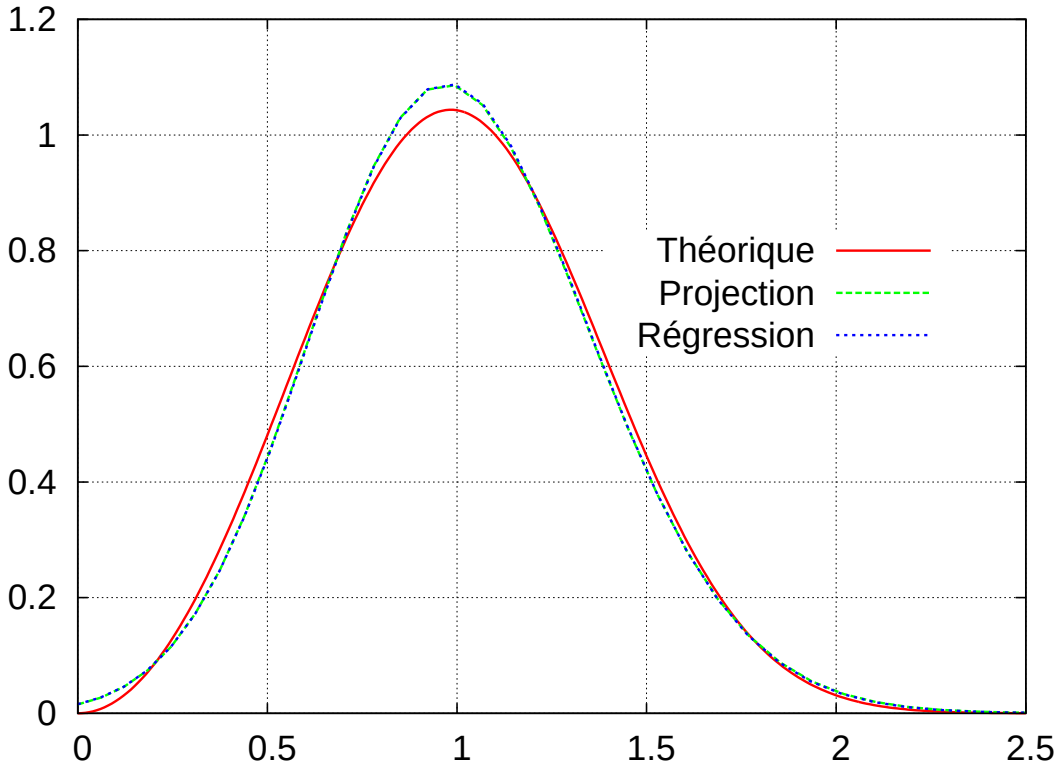


Fig. III.2 – Densités de probabilité théorique et approchées à l'ordre 3 pour la loi de Weibull

c) Loi Gamma

Soit X une variable aléatoire de loi Gamma de paramètres $k = 2$ et $\lambda = 1$ dont la densité de probabilité s'écrit $f_X(x) = \frac{\lambda}{\Gamma(k)}(\lambda x)^{k-1}e^{-\lambda x}$. Les coefficients a_i donnés par les deux méthodes sont rassemblés dans le tableau III.6 pour les ordres 3 et 4.

La meilleure approximation est obtenue à l'aide de la méthode de projection à l'ordre 4 (*cf.* figures III.4 et III.5). Cependant, quelques problèmes ont été rencontrés pour tracer les différentes densités de probabilité. Ceci est dû au fait que, pour

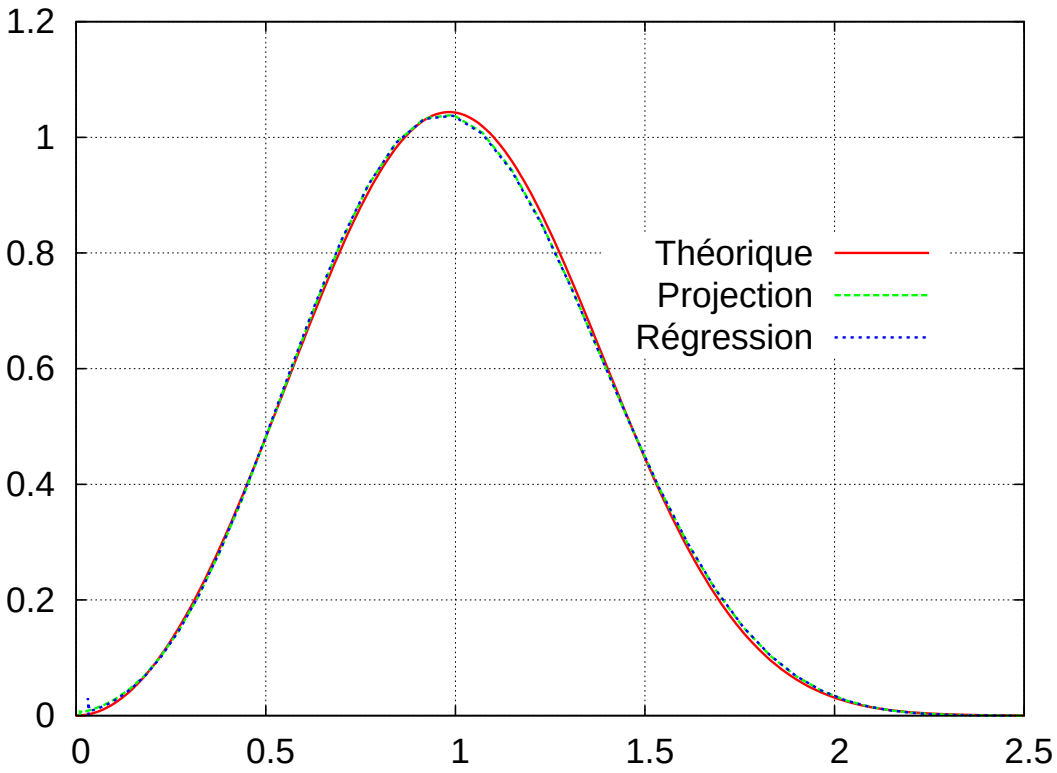


Fig. III.3 – Densités de probabilité théorique et approchées à l'ordre 4 pour la loi de Weibull

Tab. III.6 – Coefficients a_i calculés par les deux méthodes d'approximation dans le cas d'une loi Gamma

Méthode	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
Projection	2,0000	1,3405	0,3161	0,0222	-0,0018
Régression (ordre 3)	2,0040	1,3408	0,3128	0,0222	-
Régression (ordre 4)	2,0000	1,3407	0,3159	0,0224	-0,0017

Tab. III.7 – Moments calculés à partir des coefficients a_i par les deux méthodes d'approximation dans le cas d'une loi Gamma

Moments	moyenne	écart-type	asymétrie	aplatissement
Théorique	2,0000	1,4142	1,4142	6,0000
Projection 3 points	2,0000	1,4156	1,3156	5,3474
Projection 4 points	2,0000	1,4141	1,4203	6,1086
Régression (ordre 3)	2,0000	1,4141	1,4204	6,1093
Régression (ordre 4)	2,0000	1,4142	1,4141	5,9947

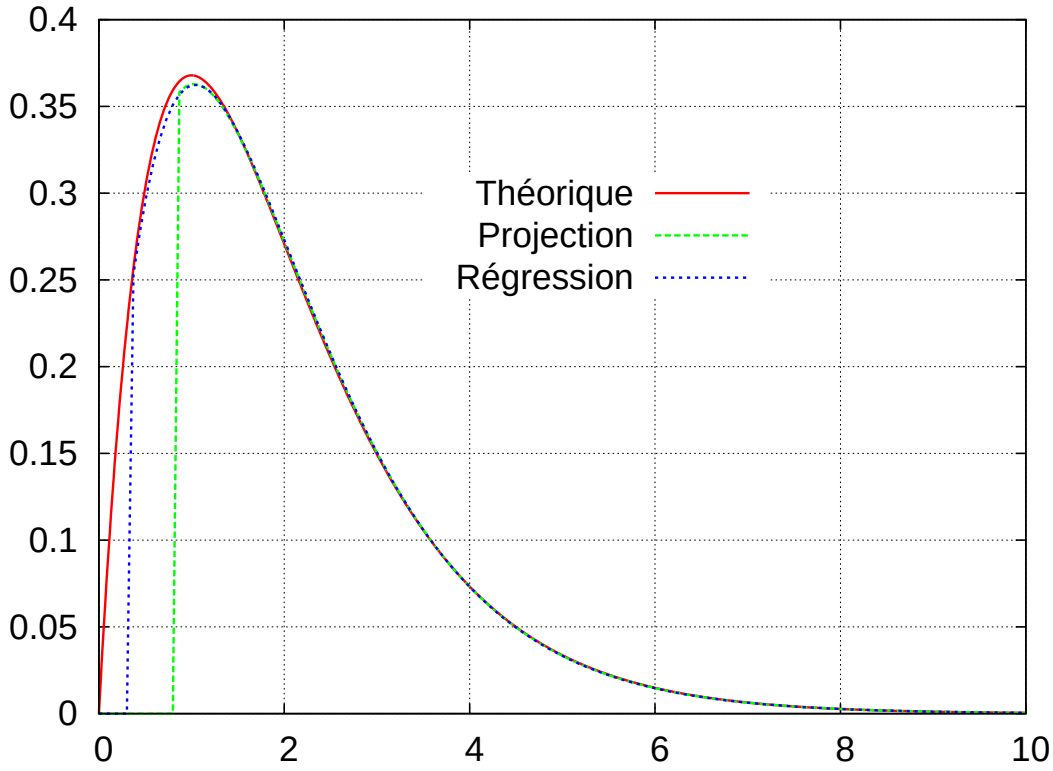


Fig. III.4 – Densités de probabilité théorique et approchées à l'ordre 3 pour la loi Gamma

obtenir des valeurs proches de l'origine, il faut que la variable aléatoire gaussienne centrée réduite ξ intervenant dans l'approximation de la variable X prenne des valeurs proches de 8,5, ce qui est peu probable (10^{-16}). Ceci explique aussi pourquoi la méthode de régression fonctionne mal : les réalisations de ξ doivent être choisies de façon à couvrir un domaine plus vaste : nous devons donc en choisir plus que pour les autres lois et elles doivent être réparties sur un intervalle plus grand.
Le tableau III.7 présente les moments statistiques de X théoriques et ceux calculés par les méthodes d'approximation (projection à l'ordre 3 avec différents nombres de points d'intégration et régression aux ordres 3 et 4). 3 points d'intégration dans la méthode de projection ne permettent de bien approximer que la moyenne et l'écart-type. A partir de 4 points d'intégration, les quatre premiers moments statistiques sont bien calculés par la méthode de projection. La méthode de régression permet de bien calculer les quatre premiers moments de X dès l'ordre 3.

d) Loi uniforme

Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $[1; 2]$. Les coefficients a_i donnés par les méthodes de projection et de régression sont rassemblés dans

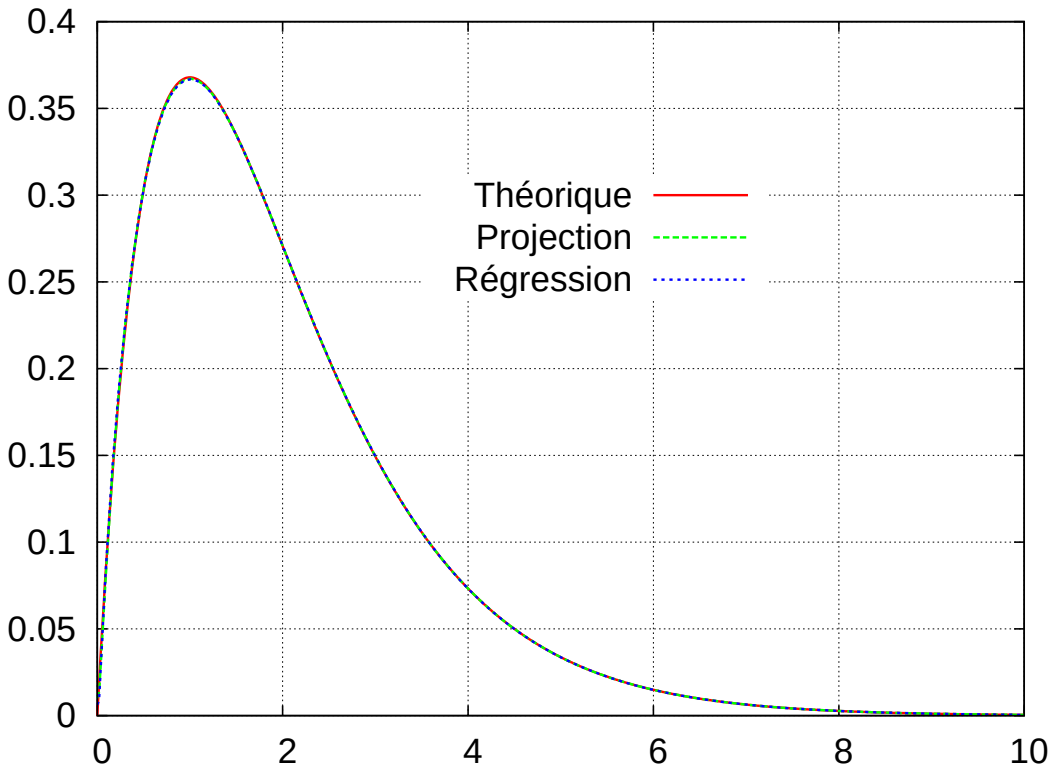


Fig. III.5 – Densités de probabilité théorique et approchées à l'ordre 4 pour la loi Gamma

le tableau III.8. Le tableau III.9 rassemble les quatre premiers moments de X théoriques et ceux calculés par la méthode de projection (à l'ordre 3 avec différents nombres de points d'intégration) et de régression (à l'ordre 3 et 4).
On remarque qu'à l'ordre 3 pour calculer correctement les quatre premiers moments de X avec la méthode de projection, il faut au moins 4 points d'intégration (3 points d'intégration ne permettent d'obtenir que les trois premiers moments). La méthode de régression permet de bien calculer les trois premiers moments à partir de l'ordre 3 mais peine à bien calculer le coefficient d'aplatissement à l'ordre 4. Les figures III.6 et III.7 présentent les densités de probabilité de X théoriques et approximés par les méthodes de projection respectivement à l'ordre 3 et 4. On remarque que les allures des densités de probabilités ne sont vraiment pas bonnes, ce qui parait normal car la densité de probabilité d'une loi uniforme est en créneau, qui est difficilement approchable par une fonction polynomiale.

Tab. III.8 – Coefficients a_i calculés par la méthode de régression dans le cas d'une loi uniforme sur $[1;2]$

Méthode	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
Théoriques	1,5000	0,2821	0,0000	-0,0235	0,0000
Projection 3 points	1,5000	0,2646	$-1,11.10^{-16}$	$-1,96.10^{-17}$	
Projection 4 points	1,5000	0,2876	$-1,17.10^{-5}$	-0,0317	
Régression (ordre 3)	1,4998	0,2723	0,0003	-0,0207	-
Régression (ordre 4)	1,5001	0,2723	0,0001	-0,0208	0,0002

Tab. III.9 – Moments calculés à partir des coefficients a_i par les deux méthodes d'approximation dans le cas d'une loi uniforme

Moments	moyenne	écart-type	asymétrie	aplatissement
Théorique	1,5000	0,2887	0,0000	1,8000
Projection 3 points	1,5000	0,2646	$-0,25.10^{-14}$	3,0000
Projection 4 points	1,5000	0,2979	$-0,12.10^{-3}$	1,8896
Régression (ordre 3)	1,5000	0,2979	$0,71.10^{-06}$	1,8896
Régression (ordre 4)	1,5000	0,2848	$0,72.10^{-05}$	2,0469

e) Loi Beta

Soit X une variable aléatoire de loi Beta de paramètres $a = 0$, $b = 0,5$, $r = 1,1$ et $s = 1,1$, dont la densité de probabilité est :

$$f_X(x) = \frac{1}{(b-a)^{r+s-1}B(r,s)}(x-a)^{r-1}(b-x)^{s-1} \tag{3.32}$$

où $B(r,s) = \int_0^1 t^{r-1}(1-t)^{s-1}dt$.
Les coefficients a_i donnés par la méthode de régression aux ordres 3 et 4 sont rassemblés dans le tableau III.10. Ne disposant d'aucune relation analytique pour la fonction quantile de la loi Beta, la valeur de x vérifiant la transformation isoprobabiliste $F_X(x) = \Phi(\xi)$ pour chacune des n réalisations de la variable ξ de la méthode de régression, a été calculée par dichotomie. Le tableau III.11 présente les moments de X théoriques et calculés par les méthodes de projection (à l'ordre 3 avec 3 et 4 points d'intégration) et de régression (aux ordres 3 et 4). Comme pour les exemples précédents, la méthode de pojection à l'ordre 3 est efficace pour calculer les trois premiers moments de X avec 3 points d'intégration. Pour obtenir le quatrième moment de X, il faut prendre 4 points d'intégration. De même la méthode de régression approxime relativement bien les moments de X (l'erreur augmente avec l'ordre du moment) dès l'ordre 3. Cette erreur est dûe à l'allure particulière de la loi Beta. Ceci est confirmée par la figure III.8 qui présente les densités de probabilités de X théoriques et calculée par la méthode de régression à l'ordre 3 et 4. Comme pour

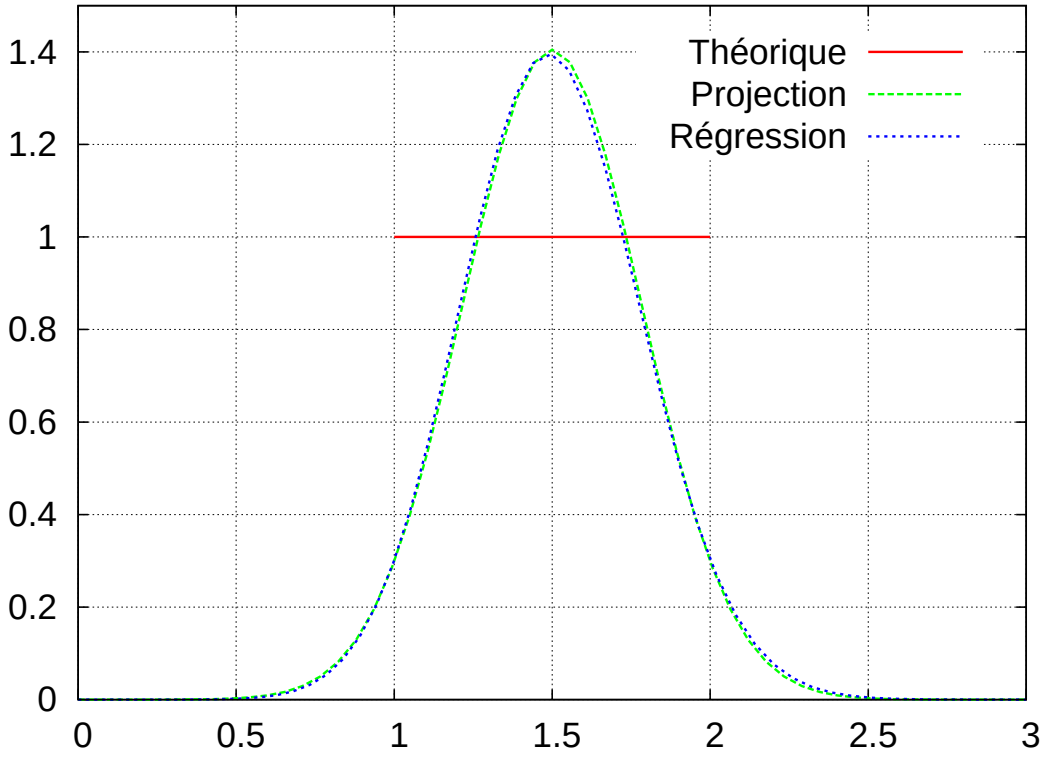


Fig. III.6 – Densités de probabilité théorique et approchées à l'ordre 3 pour la loi uniforme par les méthodes de projection et de régression

la loi uniforme, les densités approchées sont assez différentes de la densité théorique, notamment aux extrémités de l'intervalle.

Tab. III.10 – Coefficients a_i calculés par la méthode de régression dans le cas d'une loi Beta $(0; 0,5; 1, 1; 1, 1)$

Méthode	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
Projection 3 points	0,2500	0,1297	$-3,87.10^{-10}$	$-9,59.10^{-18}$	
Projection 4 points	0,2500	0,1391	$-1,95.10^{-6}$	-0,0142	
Régression (ordre 3)	0,2498	0,1328	$1,41.10^{-4}$	-0,0096	-
Régression (ordre 4)	0,2500	0,1328	$2,26.10^{-5}$	-0,0096	6,81E-5

III.2.5 Estimateurs d'erreurs

a) Définition

Comme nous l'avons vu précédemment, nous avons besoin d'estimateurs d'erreur pour pouvoir qualifier quantativement l'approximation d'une variable aléatoire par un polynôme de gaussiennes. Notons que les approximations sont non biaisées,

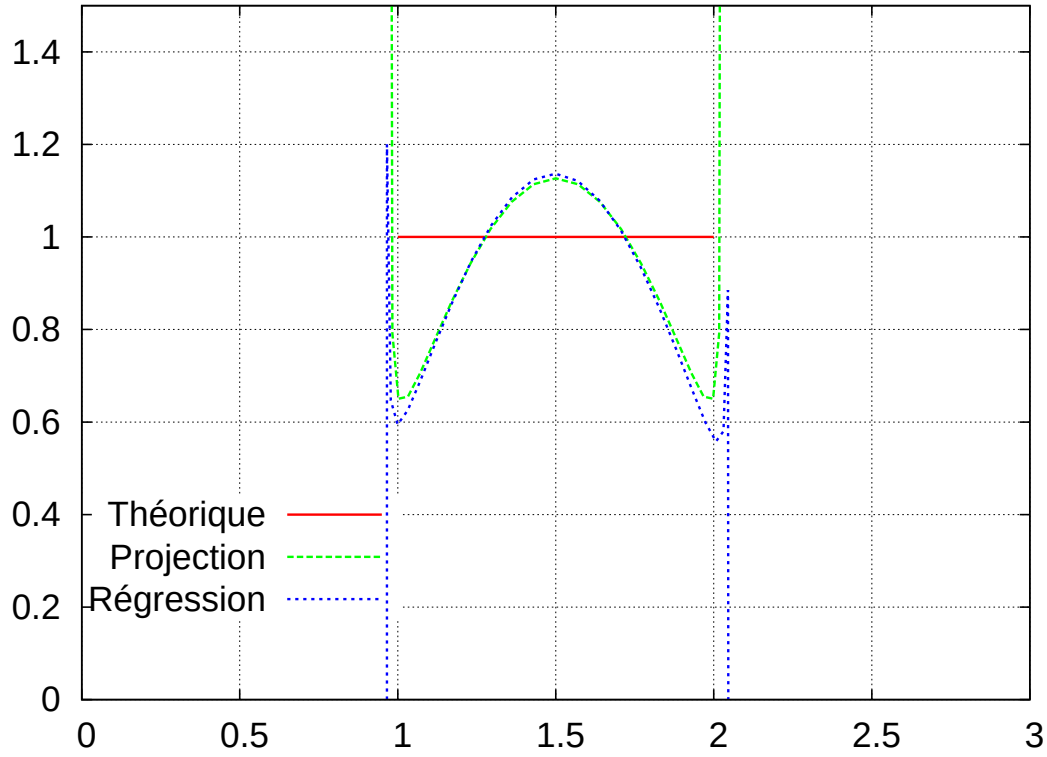


Fig. III.7 – Densités de probabilité théorique et approchées à l'ordre 4 pour la loi uniforme par les méthodes de projection et de régression

Tab. III.11 – Moments calculés à partir des coefficients a_i par les deux méthodes d'approximation dans le cas d'une loi Beta

Moments	moyenne	écart-type	asymétrie	aplatissement
Théorique	0,2500	0,1397	0,0000	1,8461
Projection 3 points	0,2500	0,1297	$-0,17.10^{-07}$	3,0000
Projection 4 points	0,2500	0,1434	$-0,44.10^{-04}$	1,9130
Régression (ordre 3)	0,2498	0,1383	$0,23.10^{-06}$	1,9130
Régression (ordre 4)	0,2500	0,9739	$0,45.10^{-05}$	2,0658

puisque le coefficient a_0 correspond à la valeur moyenne $\mathrm{E}[X]$. Les deux estimateurs proposés ci-dessous sont l'erreur sur l'écart-type et l'erreur globale sur la fonction de répartition.

Erreur sur l'écart-type Considérons la variable aléatoire X dont le développement polynomial en gaussiennes est défini par (3.1), et la variable aléatoire $\tilde{X}$ obtenue en retenant les p premiers termes de la série. Les variables X et $\tilde{X}$ ayant

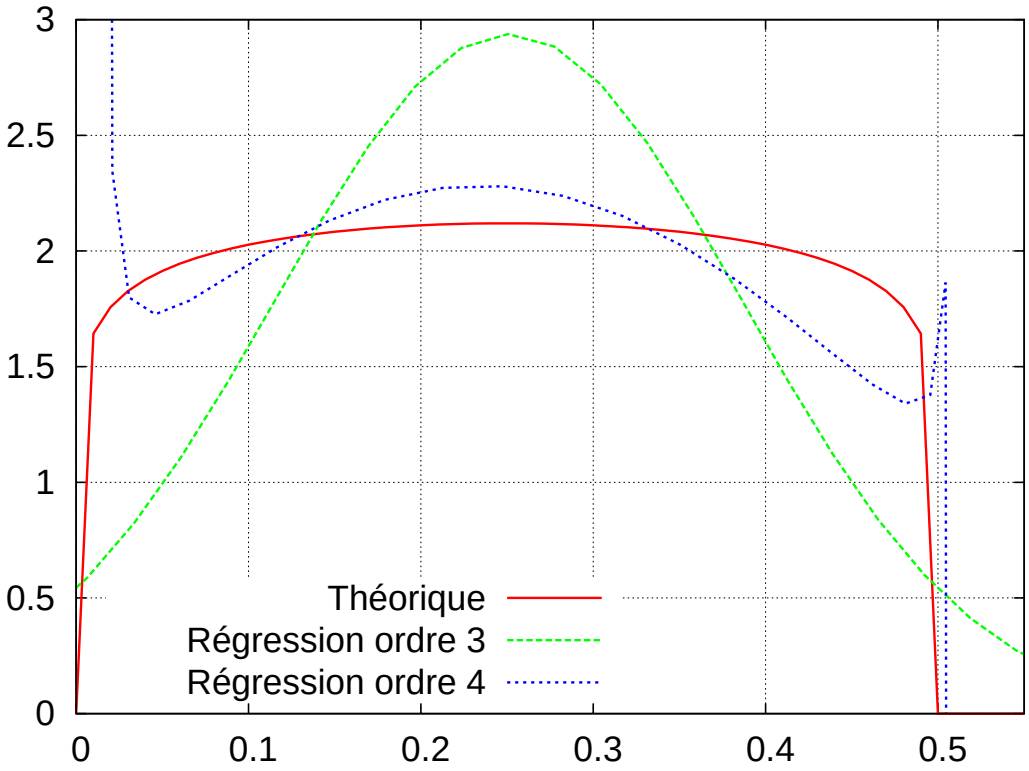


Fig. III.8 – Densités de probabilité théorique et approchées pour la loi Beta (méthode de régression)

mêmes moyennes a_0, la variance de l'écart entre X et $\tilde{X}$ s'écrit :

$$\mathrm{E}\left[(X-\tilde{X})^2\right] = \mathrm{E}\left[\sum_{i\geq p}\sum_{j\geq p} a_i a_j H_i(\xi)H_j(\xi)\right] = \sum_{j\geq p} a_j^2 j! \tag{3.33}$$

Par ailleurs, la variance σ^2 de X peut s'écrire d'après (3.1) :

$$\sigma^2 = \mathrm{E}\left[(X-a_0)^2\right] = \mathrm{E}\left[\sum_{i\geq 1}\sum_{j\geq 1} a_i a_j H_i(\xi)H_j(\xi)\right] = \sum_{j\geq 1} a_j^2 j! \tag{3.34}$$

L'erreur relative en variance définie par :

$$\varepsilon_\sigma = \frac{1}{\sigma^2}\mathrm{E}\left[(X-\tilde{X})^2\right] \tag{3.35}$$

s'exprime donc comme suit :

$$\varepsilon_\sigma = 1 - \frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{p-1} a_j^2 j! \tag{3.36}$$

Erreur sur les moments statistiques Un autre estimateur d'erreur simple à mettre en oeuvre est l'erreur relative entre les moments statistiques théoriques de X et ceux obtenus à partir de l'approximation de X par les méthodes de projection et de régression. Plus les moments d'ordre élevé (coefficients d'asymétrie et d'aplatissement) seront correctement calculés, plus la variable sera bien approchée. On peut donc se fixer que la moyenne et l'écart-type doivent obligatoirement être bien calculés à un ϵ près donné et que l'erreur relative entre les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement ne dépassent pas un seuil respectif ϵ_δ et ϵ_κ donné.

Erreur sur la fonction de répartition Cette erreur s'inspire du test de Kolmogorov [Sap90], qui consiste, en statistique, à comparer les fonctions de répartition de X et $\tilde{X} = \sum_{i=0}^{p} a_i H_i(\xi)$ pour tester l'hypothèse " *X et $\tilde{X}$ ont même loi*".
Nous utilisons ici la valeur de la statistique $\varepsilon_{CDF} = \text{Max}|F_X(x) - F_{\tilde{X}}(x)|$ comme indicateur global de la précision de l'approximation. Cet indicateur représente l'écart maximal entre la fonction de répartition de la variable aléatoire X et la fonction de répartition de la variable aléatoire approximée $\tilde{X}$.

b) Applications

Nous allons à présent comparer les deux méthodes d'approximation à l'aide des deux estimateurs d'erreur présentés ci-dessus. Les lois ainsi que leurs paramètres sont les mêmes que ceux de la section précédente. Les valeurs entre parenthèses sont la moyenne et l'écart-type des lois (sauf pour la loi uniforme où les nombres représentent les bornes inférieures et supérieures de l'intervalle et pour la loi Beta où les deux premiers nombres sont les bornes inférieures et supérieures et les deux derniers nombres sont les paramètres de la loi). Les tableaux III.12, III.13 et III.14 fournissent les valeurs des trois estimateurs pour ces lois.

Tab. III.12 – Erreur sur l'écart-type (%)

	Méthode de projection			Méthode de régression		
Loi (μ, σ)	Ordre 2	Ordre 3	Ordre 4	Ordre 2	Ordre 3	Ordre 4
Lognormale $(2; 0, 6)$	0,0012	$0,26.10^{-4}$	$0,45.10^{-6}$	$-0,0676$	$-0,39.10^{-3}$	$0,53.10^{-3}$
Weibull $(1; 0, 36)$	0,0128	0,0114	0,0113	0,0859	0,0127	0,0128
Gamma $(2; 1, 41)$	0,7504	0,7500	0,7500	0,7322	0,7504	0,7500
Uniforme $[1; 2]$	-	-	-	0,9707	0,9545	0,9545
Beta $(0; 0, 5; 1, 1; 1, 1)$	-	-	-	0,8414	0,7595	0,7595

L'estimateur d'erreur sur l'écart-type permet de quantifier la qualité de l'approximation au centre de la distribution. On remarque que l'erreur maximale

Tab. III.13 – Erreur relative sur les quatre premiers moments statistiques (%)

	Méthode de projection (ordre 3)			Méthode de régression	
Loi (μ, σ)	2 points	3 points	4 points	Ordre 3	Ordre 4
Lognormale $(2; 0, 6)$					
moyenne	-99,88	0,00	0,00	0,00	0,00
écart-type	-145,48	0,18	0,02	0,02	0,02
coeff. asymétrie	100,00	10,06	0,60	0,58	0,02
coeff. aplatissement	-28,78	13,86	1,66	1,64	0,12
Weibull $(1; 0, 36)$					
moyenne	-99,62	-0,03	0,00	0,00	0,00
écart-type	-165,99	0,19	0,03	0,03	-0,03
coeff. asymétrie	100,00	9,28	-5,89	-5,89	1,25
coeff. aplatissement	-115,42	-11,05	0,82	0,82	-0,12
Gamma $(2; 1, 41)$					
moyenne	-	0,00	0,00	0,00	0,00
écart-type	-	-0,10	0,01	0,01	0,00
coeff. asymétrie	-	6,97	-0,43	-0,44	0,01
coeff. aplatissement	-	10,88	-1,81	-1,82	0,09
Uniforme $[1; 2]$					
moyenne	-	0,00	0,00	0,00	0,00
écart-type	-	8,35	-3,19	-3,19	1,35
coeff. asymétrie[1]	-	$-2,5.10^{-15}$	$-1,20.10^{-04}$	$7,10.10^{-07}$	$7,20.10^{-06}$
coeff. aplatissement	-	-66,67	-4,98	-4,98	-13,72
Beta $(0; 0, 5; 1, 1; 1, 1)$					
moyenne	-	0,00	0,00	0,08	0,00
écart-type	-	7,16	-2,65	1,00	0,97
coeff. asymétrie[1]	-	$-1,7.10^{-8}$	$-4,40.10^{-05}$	$2,30.10^{-07}$	$4,50.10^{-06}$
coeff. aplatissement	-	-62,50	-3,62	-3,62	-11,90

[1] la valeur de référence étant nulle, on prend comme erreur la valeur du moment de la variable aléatoire approchée par le chaos polynomial

est obtenue avec les deux méthodes d'approximation pour la loi uniforme (environ 0,97%). Or nous savions, au vu des densités de probabilité de la figure III.6, que l'approximation n'était pas bonne. Cependant l'erreur est tout-à-fait acceptable. L'erreur pour la loi Gamma est de l'ordre de 0,75%. Pour les autres lois, elle est inférieure à 0,08%. Nous avons donc une excellente approximation de l'écart-type avec les deux méthodes utilisées pour chacune des lois testées. On remarque que pour l'erreur sur l'écart-type de la loi lognormale approximée par la méthode de

Tab. III.14 – Erreur sur la fonction de répartition : $\varepsilon_{CDF} = \text{Max}|F_X(x) - F_{\tilde{X}}(x)|$

	Méthode de projection			Méthode de régression		
Loi (μ, σ)	Ordre 2	Ordre 3	Ordre 4	Ordre 2	Ordre 3	Ordre 4
Lognormale $(2; 0,6)$	0,08	0,01	0,01	0,05	0,01	0,01
Weibull $(1; 0,36)$	0,06	0,02	0,01	0,04	0,01	0,01
Gamma $(2; 1,41)$	0,18	0,07	0,01	0,10	0,04	0,01
Uniforme $[1; 2]$	-	-	-	0,13	0,12	0,12
Beta $(0; 0,5; 1, 1; 1, 1)$	-	-	-	0,12	0,10	0,10

régression, nous obtenons des valeurs négatives, ce qui peut paraître surprenant. Nous ne pouvons pas obtenir de valeurs négatives avec la méthode de projection, car ε_σ (Eq. (3.35)) est strictement positif du fait de la convergence de $\tilde{X}$ vers X. Par contre, pour la méthode de régression, les résultats dépendent des points $\xi^{(i)}$ choisis ; l'erreur en écart-type peut donc être négative.

L'estimateur sur les moments statistiques permet de s'assurer de la qualité de l'approximation en tendance centrale (avec la moyenne et l'écart-type) et sur l'allure de la densité de probabilité (le coefficient d'asymétrie permet de quantifier la répartition des données vis-à-vis de la valeur moyenne, et le coefficient d'aplatissement permet de quantifier la dispersion des valeurs). Pour la méthode de projection, nous avons regarder l'influence du nombre de points d'intégration (entre 2 et 4) à ordre constant (ici 3). On remarque que 2 points d'intégration engendrent une erreur beaucoup trop importante (environ 100% pour la moyenne), nous avions déjà vu cela précédemment. Lorsque nous utilisons 3 points d'intégration, la moyenne et l'écart-type sont bien calculés pour les lois non bornées (lognormale, de Weibull, gamma) (moins de 1% d'erreur). En revanche pour les lois uniforme et Beta, nous avons une erreur relative d'au minimum 7% pour l'écart-type, ce qui est trop important. Ceci est dû au caractère borné de ces lois. Pour le coefficient d'asymétrie des lois non bornées, l'erreur moyenne avec 3 points d'intégration est d'environ 9% alors qu'avec 4 points d'intégration, elle n'est que de 3%. On peut donc augmenter la précision en augmentant le nombre de points d'intégration. Pour les lois bornées, le coefficient d'asymétrie (qui normalement est nul) a une valeur maximale en valeur absolue d'environ 10^{-4} quelque soit le nombre de points d'intégration, l'erreur est donc très faible. Les lois uniforme et Beta étant symétriques par rapport à la valeur moyenne, on peut sans problème rendre compte de ce phénomène avec un polynôme. Les coefficients d'aplatissement sont calculés avec une moyenne d'environ 10% d'erreur pour les lois non bornées et d'environ 60% pour les lois bornées. En utilisant 4 points d'intégration, on arrive à diminuer cette erreur : elle est d'en moyenne 2% pour les lois bornées et de 5% pour les lois

bornées.
Pour la méthode de régression à l'ordre 3, on remarque que l'on a moins de 5% d'erreur sur les quatre premiers moments pour les lois non bornées. En passant à l'ordre 4, cette erreur diminue à moins de 2%. Pour la loi uniforme, les ordres 3 et 4 permettent de calculer la moyenne et l'écart-type avec moins de 3% d'erreur. Le coefficient d'asymétrie (qui normalement est nul) a une valeur maximale en valeur absolue d'environ 1.10^{-7} quelque soit le nombre de points d'intégration, l'erreur est donc très faible. L'aplatissement est calculé avec 5% d'erreur pour l'ordre 3 et 14% d'erreur pour l'ordre 4. Il est normal que l'erreur sur le coefficient d'asymétrie soit inférieure à celle sur l'aplatissement car la loi uniforme étant symétrique par rapport à la valeur moyenne, on peut sans problème rendre compte de ce phénomène avec un polynôme. L'aplatissement est lié entre autre au caractère borné des lois, il est donc normal que l'on ait plus de difficultés à le calculer dans ce cas. Pour la loi Beta, on retrouve les mêmes résultats pour les trois premiers moments que pour la loi uniforme (à savoir que l'approximation est très bonne dès l'ordre 3). Pour le coefficient d'aplatissement, l'erreur relative augment en passant de l'ordre 3 à l'ordre 4 ce qui se comprend en voyant les allures des densités de probabilités théoriques et approchées de la figure III.8. On voit bien que la densité de probabilité à l'ordre 3 est plus proche aux niveaux des bornes de l'intervalle que celle à l'ordre 4.

L'estimateur d'erreur sur la fonction de répartition permet de quantifier la qualité de l'approximation sur l'ensemble du domaine de définition de la variable. On remarque que c'est la loi uniforme qui est la moins bien approchée, ce qui était prévisible. Pour ce qui est des autres lois, comme pour le premier estimateur, c'est la loi Gamma qui est la moins bien approximée après les lois lognormales et de Weibull. La loi Beta est légèrement moins bien approximée que la loi uniforme vis-à-vis des deux tests. Cependant la distance entre les deux fonctions de répartition est au maximum de 0,07 à un ordre supérieur à 3. On conclut donc que les deux méthodes proposées fournissent des résultats suffisamment précis pour toutes les lois testées hormis les lois uniforme et Beta.

c) Conclusion

Les estimateurs d'erreur sur l'écart-type et sur la fonction de répartition ont permis de montrer la qualité des approximations des variables aléatoires par des polynômes d'Hermite et ce pour toutes les lois testées à l'exception des lois uniforme et Beta. On remarque que l'ordre 3 est généralement suffisant (il fournit les mêmes résultats que l'ordre 4). Il semble que la moindre précision obtenue pour les lois uniformes et Beta soit due au caractère *borné* de ces lois. D'autres estimateurs d'erreur [FG04] existent et ont été testés entre autre sur l'approximation de variables aléatoires lognormale et uniforme. Les auteurs reprennent les estimateurs présentés

ci-dessus et en considèrent trois d'autres : le premier est la différence entre une réalisation de la variable aléatoire théorique une réalisation de la solution approchée (pour des valeurs de v.a.g.c.r. dans l'approximation de 0 et 4) ; le second peut-être vu comme la probabilité que l'approximation prenne des valeurs non acceptables ; et enfin le dernier estimateur d'erreur testé est une mesure de la différence entre la variable aléatoire théorique et l'approximation à un fractile de 99% (on se situe dans les queues de distribution). Leur premier estimateur d'erreur est faible pour la loi lognormale pour les deux valeurs de v.a.g.c.r., alors que pour la loi uniforme, des oscillations apparaisssent pour une valeur de v.a.g.c.r. de 4. Leur second estimateur montre des oscillations pour la loi lognormale lorsque l'ordre du chaos est compris entre 1 et 5. Pour la loi uniforme, l'approximation n'est pas bonne si l'ordre du chaos est inférieur à 5 si on se réfère à cet estimateur. Enfin vis-à-vis du dernier estimateur, l'approximation d'une loi lognormale est bonne pour de petits ordres de chaos polynomial alors que pour la loi uniforme, l'ordre du chaos doit être supérieur à 13 pour avoir une bonne approximation.
On voit bien que ces estimateurs ont chacun leur intérêt (erreur sur la moyenne, à une fractile donné, ...) et qu'il n'existe pas d'indicateur global de l'erreur due à l'approximation. De plus, pour pouvoir utiliser ces estimateurs, on suppose connu la loi de la variable à approximer, ce qui n'est pas toujours le cas.

III.2.6 Développement de fonctions de variables aléatoires

Par la suite, nous sommes amenés à développer des fonctions de variables aléatoires sur le chaos polynomial. En effet, par exemple en mécanique linéaire, le coefficient de Poisson ν du matériau apparaît dans la loi de comportement sous les formes $\frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ et $\frac{1}{2(1+\nu)}$, et ce sont ces fonctions qu'il conviendra de développer sur le chaos polynomial.
Soit X une variable aléatoire et g une fonction suffisamment régulière. En décomposant $g(X)$ sur la base des polynômes d'Hermite, nous obtenons :

$$g(X(\xi)) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i H_i(\xi) \tag{3.37}$$

les $\{g_i, i \geq 0\}$ étant les coefficients inconnus à déterminer.

a) Méthode de projection

En multipliant l'équation (3.37) par $H_i(\xi)$ et en prenant l'espérance, on obtient :

$$g_i = \frac{\mathrm{E}[g(X(\xi))H_i(\xi)]}{\mathrm{E}[H_i(\xi)]^2} \tag{3.38}$$

En utilisant la transformation isoprobabiliste $X \to \xi$ vérifiant $F_X(x) = \Phi(\xi)$, on peut écrire :

$$g_i = \frac{1}{i!} \int_{\mathbb{R}} g(F_X^{-1}(\Phi(t)))H_i(t)\varphi(t)dt \tag{3.39}$$

b) Méthode de régression

On remplace l'équation (3.25) par :

$$\triangle X = \sum_{i=1}^{n} (g(X^i) - g(\tilde{X}^i))^2 \tag{3.40}$$

et on applique à l'identique la méthode présentée dans le paragraphe III.2.3.

III.2.7 Développements de plusieurs variables aléatoires indépendantes

Considérons M variables aléatoires $\{X^1, \cdots, X^M\}$ développées chacune sur la base des polynômes d'Hermite de gaussiennes centrées réduites $\{\xi_1, \cdots, \xi_M\}$ à l'ordre n_i , $i = \{1, \cdots, M\}$:

$$X^i = \sum_{k=0}^{n_i} x_k^i H_k(\xi_i) \tag{3.41}$$

Ces variables peuvent être développées sur la base du chaos polynomial de degré $p = \max_{i=1,\cdots,M} n_i$ basé sur les variables $\{\xi_1, \cdots, \xi_M\}$:

$$X^i = \sum_{j=0}^{P-1} \tilde{x}_j^i \Psi_j(\{\xi_k\}_{k=1}^M) \tag{3.42}$$

Le positionnement des coefficients consiste à établir le lien entre $\tilde{x}_j^i$ et x_k^i. Pour chaque variable X^i, le coefficient d'ordre 0 (valeur moyenne de la variable) est identique sur les deux bases. Par ailleurs, les coefficients $\tilde{x}_j^i$ correspondant à un polynôme Ψ_j dépendant de plusieurs variables ξ_i sont tous nuls. Il en résulte l'algorithme suivant de positionnement :

Données

. $(x_k^i) \quad i = \{1, \cdots, M\}, \quad k = \{0, \cdots, n_i\}$

Initialisation

. $\tilde{x}_0^i = x_0^i \quad i = \{1, \cdots, M\}$

. $\tilde{x}_j^i = 0 \quad i = \{1, \cdots, M\} \quad j = \{1, \cdots, P-1\}$

Positionnement

. Pour $j = \{1, \cdots, P-1\}$

. Si $\boldsymbol{\alpha}_j$ (séquence d'entiers définissant Ψ_j) a un seul terme non nul $q \in [1, M]$

. Si $\alpha_j(q) \leq n_q$

. $\tilde{x}_j^q = x_{\alpha_j(q)}^q$

. Fin Si

. Fin Si

. Fin Boucle j

Exemple Considérons 3 variables aléatoires X_1, X_2, X_3. Chacune de ces trois variables peut se mettre sous la forme $X^i(\xi_i) = \sum_{j=0}^{n_i} x_j^i H_j(\xi_i),\ i \in \{1,2,3\}$, n_i étant le degré d'approximation de chaque variable. Prenons $n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 1$. Le tableau III.15 rassemble les coefficients avant repositionnement dans la base du chaos polynomial. Le tableau III.16 rassemble les coefficients après repositionnement dans la base du chaos polynomial.

Tab. III.15 – Coefficients x_i^j avant repositionnement

	1	ξ	$\xi^2 - 1$
X^1	x_0^1	x_1^1	x_2^1
X^2	x_0^2	x_1^2	x_2^2
X^3	x_0^3	x_1^3	0

Tab. III.16 – Coefficients x_i^j après repositionnement

	1	ξ_1	ξ_2	ξ_3	$\xi_1^2 - 1$	$\xi_1\xi_2$	$\xi_1\xi_3$	$\xi_2^2 - 1$	$\xi_2\xi_3$	$\xi_3^2 - 1$
X^1	x_0^1	x_1^1	0	0	x_2^1	0	0	0	0	0
X^2	x_0^2	0	x_1^2	0	0	0	0	x_2^2	0	0
X^3	x_0^3	0	0	x_1^3	0	0	0	0	0	0

III.2.8 Conclusion

Cette section a permis de montrer comment approximer des variables aléatoires ou des fonctions de variables aléatoires par des polynômes d'Hermite. Les deux méthodes présentées (projection et régression) sont applicables pour tout type de variable. L'ordre 3 est en général nécessaire pour avoir une précision raisonnable (1% d'erreur en variance et 5% pour l'erreur sur la fonction de répartition). La méthode de régression semble plus précise que la méthode de projection pour développer des fonctions non linéaires de variables aléatoires. Les estimateurs n'ont pas été testés sur ces fonctions de variables aléatoires car pour pouvoir utiliser ces estimateurs, il faudrait connaître la loi de la fonction à approximer. Nous avons également vu comment développer conjointement plusieurs variables aléatoires sur le chaos polynomial.

III.3 Eléments finis stochastiques en élasticité linéaire

III.3.1 Introduction

L'introduction de l'aléa dans les propriétés matériaux et dans le chargement conduit à définir une matrice de rigidité $\boldsymbol{K}(\theta)$ et un vecteur des efforts nodaux $\underline{F}(\theta)$ stochastiques. Soit M le nombre total de variables aléatoires intervenant dans le problème, regroupées dans le vecteur aléatoire $\underline{X} = \{X^1, \cdots, X^M\}$. Chaque variable est développée sur la base des polynômes de Hermite (section III.2) :

$$X^i = \sum_{j=0}^{\infty} x_j^i H_j(\xi_i) \tag{3.43}$$

Ces développements introduisent donc naturellement M variables gaussiennes centrées réduites $\{\xi_1, \cdots, \xi_M\}$. Soit $\{\Psi_j(\{\xi_i\}_{i=1}^M), j = 0, \cdots, \infty\}$ le chaos polynomial défini à partir de ces M variables. On peut injecter les développements (3.43) sur le chaos (section III.2.7) ce qui s'écrit formellement :

$$X^i = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{x}_j^i \Psi_j(\{\xi_k\}_{k=1}^M) \tag{3.44}$$

On détaille maintenant les expressions que prennent $\boldsymbol{K}(\theta)$ et $\underline{F}(\theta)$ dans différents cas de figure.

III.3.2 Introduction de propriétés matériaux aléatoires

L'introduction de variables aléatoires pour la description des propriétés matériaux (module d'Young, coefficient de Poisson) conduit à une matrice de rigidité aléatoire. De façon tout à fait générale, elle peut être développée sur la base du chaos polynomial :

$$\boldsymbol{K}(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{K}_j \Psi_j(\theta) \tag{3.45}$$

où les $\boldsymbol{K}_j$ sont des matrices de rigidité pondérées déterministes obtenues par projection :

$$\boldsymbol{K}_j = \frac{\mathrm{E}[\boldsymbol{K}(\theta)\Psi_j(\theta)]}{\mathrm{E}[\Psi_j^2(\theta)]} \tag{3.46}$$

Reprenant les expressions (2.30) et (2.31), la matrice de rigidité stochastique globale s'écrit :

$$\boldsymbol{K}(\theta) = \bigcup_e \int_{\Omega_e} \boldsymbol{B}^T \cdot \boldsymbol{D}(\theta) \cdot \boldsymbol{B}\, d\Omega_e \tag{3.47}$$

En effet, lorsque l'on considère les propriétés des matériaux aléatoires, seule la matrice d'élasticité $\boldsymbol{D}(\theta)$ devient aléatoire, alors que $\boldsymbol{B}$ reste déterministe,

puisqu'elle ne contient que des paramètres géométriques. En combinant (3.45) et (3.46), il vient :

$$\boldsymbol{K}_j = \frac{1}{\mathrm{E}[\Psi_j^2(\theta)]} \bigcup_e \int_{\Omega_e} \boldsymbol{B}^T \cdot \mathrm{E}[\boldsymbol{D}(\theta)\Psi_j(\theta)] \cdot \boldsymbol{B} d\Omega_e \tag{3.48}$$

Les paragraphes qui suivent montrent comment sont calculées les matrices $\boldsymbol{K}_j$ dans différents cas.

a) Module d'Young E aléatoire, coefficient de Poisson ν déterministe

On peut écrire la matrice d'élasticité $\boldsymbol{D}$ en déformations planes sous la forme :

$$\boldsymbol{D} = E(\theta) \cdot \boldsymbol{D}_0 \tag{3.49}$$

où la matrice déterministe $\boldsymbol{D}_0$ vaut :

$$\boldsymbol{D}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1+\nu} \end{pmatrix} \tag{3.50}$$

Comme expliqué ci-dessus, on peut développer E indifféremment sous la forme :

$$E = \sum_{i=0}^{\infty} e_i H_i(\xi_E) = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{e}_i \Psi_i(\{\xi_k\}_{k=1}^M) \tag{3.51}$$

En injectant (3.51) dans (3.49), il vient :

$$\boldsymbol{D} = \sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{e}_i \boldsymbol{D}_0 \Psi_i \tag{3.52}$$

En substituant (3.52) dans (3.48), il vient :

$$\boldsymbol{K}_j = \frac{1}{\mathrm{E}[\Psi_j^2(\theta)]} \bigcup_e \int_{\Omega_e} \boldsymbol{B}^T \cdot \mathrm{E}\left[\sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{e}_i \boldsymbol{D}_0 \Psi_i \Psi_j\right] \cdot \boldsymbol{B} d\Omega_e = \widetilde{e}_j \boldsymbol{K}_0 \tag{3.53}$$

où $\boldsymbol{K}_0 = \bigcup_e \int_{\Omega_e} \boldsymbol{B}^T \cdot \boldsymbol{D}_0 \cdot \boldsymbol{B} d\Omega_e$ désigne la matrice de rigidité associée à un module d'Young unitaire.

b) Module d'Young E et coefficient de Poisson ν aléatoires et homogènes sur la structure

La matrice d'élasticité $\boldsymbol{D}$ peut se décomposer sous la forme :

$$\boldsymbol{D} = E\left(\tilde{\lambda}(\nu)\boldsymbol{D}_1 + 2\tilde{\mu}(\nu)\boldsymbol{D}_2\right) \tag{3.54}$$

avec :

$$\tilde{\lambda}(\nu) = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad , \quad \tilde{\mu}(\nu) = \frac{1}{2(1+\nu)} \tag{3.55}$$

et

$$\boldsymbol{D}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{D}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.56}$$

Dans le cas où les deux paramètres E et ν sont aléatoires, on développe les deux fonctions de ν de la manière suivante :

$$\begin{cases} \tilde{\lambda}(\nu) &= \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} g_j^1 H_j(\xi_\nu) \\ \tilde{\mu}(\nu) &= \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} g_j^2 H_j(\xi_\nu) \end{cases} \tag{3.57}$$

En reportant (3.51), (3.56), (3.57) dans (3.54), il vient :

$$\boldsymbol{D} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} e_i g_j^1 H_i(\xi_E) H_j(\xi_\nu) \boldsymbol{D}_1 + \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} e_i g_j^2 H_i(\xi_E) H_j(\xi_\nu) \boldsymbol{D}_2 \tag{3.58}$$

On injecte ensuite les produits $H_i(\xi_E)H_j(\xi_\nu)$ dans la base du chaos polynomial Ψ_k :

$$H_i(\xi_E) H_j(\xi_\nu) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{ijk} \Psi_k \tag{3.59}$$

On en tire :

$$\boldsymbol{D} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} e_i\, g_j^1\, \gamma_{ijk} \boldsymbol{D}_1 \Psi_k + \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} e_i\, g_j^2\, \gamma_{ijk} \boldsymbol{D}_2 \Psi_k \tag{3.60}$$

Soit, en regroupant les termes :

$$\boldsymbol{D} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\alpha_j \boldsymbol{D}_1 + \beta_j \boldsymbol{D}_2\right) \Psi_j \tag{3.61}$$

où l'on a posé :

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_{ijk} e_i g_j^1 \\ \beta_k &= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_{ijk} e_i g_j^2 \end{aligned} \tag{3.62}$$

Finalement, on a :

$$\boldsymbol{K}_j = \frac{1}{\mathrm{E}[\Psi_j^2(\theta)]} \bigcup_e \int_{\Omega_e} \boldsymbol{B}^T \cdot \left(\alpha_j \boldsymbol{D}_1 + \beta_j \boldsymbol{D}_2\right) \cdot \boldsymbol{B}\, d\Omega_e \tag{3.63}$$

c) Cas de plusieurs matériaux aléatoires

Lorsque le modèle comporte plusieurs matériaux différents, chacun ayant des paramètres aléatoires, on applique les mêmes méthodes mais en prenant soin de choisir le matériau affecté à chaque élément. Pour chaque élément, la matrice $\boldsymbol{D}$ est développée en (3.52) ou (3.58) selon le cas. Le résultat est ensuite injecté dans le chaos polynomial basé sur l'*ensemble* des variables relatives à tous les matériaux. La procédure d'assemblage est ensuite identique. Les développements précédents montrent que, quelque soit le nombre de variables aléatoires utilisées pour décrire les propriétés des matériaux, la matrice de rigidité (aléatoire) se met sous la forme :

$$\boldsymbol{K}(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{K}_j \Psi_j(\theta) \tag{3.64}$$

III.3.3 Introduction de chargements aléatoires

Le vecteur des efforts nodaux s'écrit :

$$\underline{F}(\theta) = \sum_{i=1}^{N_q} q^i(\theta) \underline{F}_i^{(1)} \tag{3.65}$$

où les $\{q^i(\theta), i = 1, \cdots, N_q\}$ sont les paramètres aléatoires de chargement et les $\underline{F}_i(1)$ les vecteurs des efforts nodaux unitaires. En supposant ces paramètres indépendants et en les développant sur les polynômes d'Hermite d'une variable gaussienne ξ_i, puis sur le chaos polynomial par positionnement (cf. paragraphe III.2.7), il vient :

$$q^i = \sum_{j=0}^{\infty} q_j^i H_j(\xi_i) = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{q}_j^i \Psi_j \tag{3.66}$$

Ainsi, le vecteur des efforts nodaux s'écrit :

$$\underline{F}(\theta) = \sum_{i=1}^{N_q} \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{q}_j^i \Psi_j \underline{F}_i^{(1)} = \sum_{j=0}^{\infty} \underline{F}_j \Psi_j \tag{3.67}$$

où l'on a posé :

$$\underline{F}_j = \sum_{i=1}^{N_q} \tilde{q}_j^i \underline{F}_i^{(1)} \tag{3.68}$$

Les développements précédents montrent que, quelque soit le nombre de variables aléatoires utilisées pour décrire le chargement, le vecteur des efforts nodaux (aléatoire) se met sous la forme :

$$\underline{F}(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \underline{F}_j \Psi_j(\theta) \tag{3.69}$$

III.3.4 Obtention du système linéaire

Du fait de l'introduction de l'aléa dans $\boldsymbol{K}$ et $\underline{F}$, le vecteur des déplacements nodaux $\underline{U}$ devient aléatoire et vérifie l'équation d'équilibre stochastique :

$$\boldsymbol{K}(\theta) \cdot \underline{U}(\theta) = \underline{F}(\theta) \tag{3.70}$$

Pour résoudre ce problème, on développe également $\underline{U}(\theta)$ sur la base du chaos polynomial :

$$\underline{U}(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \underline{U}_j \Psi_j(\theta) \tag{3.71}$$

où les coefficients $\underline{U}_j$ sont les inconnues du problème.
Pour les déterminer, il est nécessaire de tronquer les séries (3.64), (3.69) et (3.71). La troncature à l'ordre P introduit un résidu dans l'équation d'équilibre (3.70) :

$$\epsilon_P = \left(\sum_{i=0}^{P-1} \boldsymbol{K}_i \Psi_i(\theta) \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{P-1} \underline{U}_j \Psi_j(\theta) \right) - \sum_{j=0}^{P-1} \underline{F}_j \Psi_j(\theta) \tag{3.72}$$

Les coefficients $\underline{U}_j$ sont déterminés de sorte à *minimiser* ce résidu. Cette minimisation au sens de Galerkin revient à projeter le vecteur des déplacements nodaux aléatoires $\underline{U}(\theta)$ sur le sous-espace engendré par $\{\Psi_k, k = 0, \cdots, P-1\}$ ou encore à exiger l'orthogonalité du résidu avec le sous-espace engendré par ces Ψ_k. Cela s'écrit :

$$\mathrm{E}[\epsilon_P \Psi_k] = 0 \qquad k = \{0, \cdots, P-1\} \tag{3.73}$$

ou encore :

$$\sum_{i=0}^{P-1} \sum_{j=0}^{P-1} d_{ijk} \boldsymbol{K}_i \cdot \underline{U}_j = \underline{F}_k \cdot \mathrm{E}[\Psi_k^2] \qquad k = \{0, \cdots, P-1\} \tag{3.74}$$

où l'on a posé $d_{ijk} = \mathrm{E}[\Psi_i \Psi_j \Psi_k]$. Pour calculer ces coefficients, on utilise la représentation (2.27) de chaque polynôme :

$$\begin{cases} \Psi_i = \displaystyle\prod_{m=1}^{M} H_{\alpha_m}(\xi_m) \quad , \quad \alpha_m \geq 0 \\ \Psi_j = \displaystyle\prod_{m=1}^{M} H_{\beta_m}(\xi_m) \quad , \quad \beta_m \geq 0 \\ \Psi_k = \displaystyle\prod_{m=1}^{M} H_{\gamma_m}(\xi_m) \quad , \quad \gamma_m \geq 0 \end{cases} \tag{3.75}$$

où $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_M\}$, $\{\beta_1, \cdots, \beta_M\}$, $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_M\}$ sont des listes de M entiers non négatifs. Grâce aux équations (2.17) et (3.75), on a finalement :

$$d_{ijk} = \mathrm{E}[\Psi_i \Psi_j \Psi_k] = \prod_{m=1}^{M} D_{\alpha_m \beta_m \gamma_m} \tag{3.76}$$

En posant $\boldsymbol{K}_{j,k} = \sum_{i=0}^{P-1} \frac{\boldsymbol{K}_i d_{ijk}}{\mathrm{E}[\Psi_k^2]}$, on obtient :

$$\sum_{j=0}^{P-1} \boldsymbol{K}_{j,k} \cdot \underline{U}_j = \underline{F}_k \qquad k = \{0, \cdots, P-1\} \tag{3.77}$$

Ces P équations se mettent sous la forme du système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{K}_{0,0} & \cdots & \boldsymbol{K}_{0,P-1} \\ \boldsymbol{K}_{1,0} & \cdots & \boldsymbol{K}_{1,P-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{K}_{P-1,0} & \cdots & \boldsymbol{K}_{P-1,P-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_0 \\ \underline{U}_1 \\ \vdots \\ \underline{U}_{P-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{F}_0 \\ \underline{F}_1 \\ \vdots \\ \underline{F}_{P-1} \end{pmatrix} \tag{3.78}$$

noté encore dans la suite :

$$\boldsymbol{\mathcal{K}} \cdot \underline{\mathcal{U}} = \underline{\mathcal{F}} \tag{3.79}$$

On remarque que le système (3.78) a la même allure que celui de l'équation (2.59).

III.3.5 Stratégies de résolution

Le système précédent est de structure identique à celui obtenu dans le cadre de la méthode des éléments finis stochastiques spectraux présentés à la section II.5.5 Eq.(2.59). La résolution se fait donc grâce aux méthodes présentées dans la section II.5.6.

III.3.6 Développement de la réponse du système

Une fois les coefficients du développement obtenus, le vecteur des déplacements nodaux s'écrit de façon approchée :

$$\underline{U} = \sum_{j=0}^{P-1} \underline{U}_j \Psi_j(\xi_1, \ldots, \xi_M) \tag{3.80}$$

La caractérisation complète de la réponse nécessite le calcul des développements, sur le chaos polynomial, des tenseurs de déformation et de contrainte.

Déformation En tout point $\underline{x} \in \Omega_e$, on a :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) = \boldsymbol{B}(\underline{x}) \cdot \underline{u}_e \tag{3.81}$$

où $\underline{u}_e$ désigne le vecteur des déplacements nodaux de l'élément courant e. Le développement (3.80) restreint au vecteur $\underline{u}_e$ s'écrit :

$$\underline{u}_e = \sum_{j=0}^{P-1} \underline{u}_{e,j} \Psi_j(\xi_1, \ldots, \xi_M) \tag{3.82}$$

En reportant (3.82) dans (3.81), on obtient :

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon}(\underline{x}) &= \sum_{j=0}^{P-1} \underline{\varepsilon}_j(\underline{x})\Psi_j \\ \text{avec} \quad \underline{\varepsilon}_j(\underline{x}) &= \boldsymbol{B}(\underline{x}) \cdot \underline{u}_{e,j} \end{aligned} \tag{3.83}$$

Autrement dit, chaque terme d'ordre j du développement du vecteur des déformations $\underline{\varepsilon}$ s'obtient à partir du terme d'ordre j du développement du vecteur des déplacements nodaux élémentaires, en multipliant comme dans le cas déterministe par la matrice $\boldsymbol{B}$.

a) Contraintes

Cas E aléatoire Lorsque que le module d'Young E est aléatoire, la matrice de rigidité s'écrit :

$$\boldsymbol{D} = \left(\sum_{i=0}^{P-1} e_i \Psi_i \right) \boldsymbol{D}_0 \tag{3.84}$$

Le vecteur des contraintes $\underline{\sigma}(\underline{x})$ en tout point $\underline{x} \in \Omega_e$ s'écrit :

$$\underline{\sigma}(\underline{x}) = \boldsymbol{D} \cdot \underline{\varepsilon}(\underline{x}) = \sum_{i=0}^{P-1} \sum_{k=0}^{P-1} e_i \boldsymbol{D}_0 \cdot \underline{\varepsilon}_k(\underline{x}) \Psi_i \Psi_k \tag{3.85}$$

Pour simplifier cette expression, il faut repositionner les produits $\Psi_i \Psi_k$ sur la base du chaos polynomial :

$$\Psi_i \Psi_k = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d_{ijk}}{\mathrm{E}[\Psi_k^2]} \Psi_j \tag{3.86}$$

Pour garder la cohérence dans l'ordre du développement, on ne retient que les P premiers termes dans la suite précédente. Il vient alors :

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}(\underline{x}) &= \sum_{j=0}^{P-1} \underline{\sigma}_j \underline{x} \Psi_j \\ \text{avec} \quad \underline{\sigma}_j(\underline{x}) &= \sum_{i=0}^{P-1} \sum_{k=0}^{P-1} \frac{d_{ijk}}{\mathrm{E}[\Psi_k^2]} e_i \boldsymbol{D}_0 \cdot \underline{\varepsilon}_k(\underline{x}) \end{aligned} \tag{3.87}$$

Cas E, ν aléatoires Lorsque le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν sont aléatoires, la matrice de rigidité s'écrit de façon approchée (Eq.3.61) :

$$\boldsymbol{D} = \sum_{i=0}^{P-1} (\alpha_i \boldsymbol{D}_1 + \beta_i \boldsymbol{D}_2) \Psi_i \tag{3.88}$$

Le vecteur des contraintes s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}(\underline{x}) &= \sum_{j=0}^{P-1} \underline{\sigma}_j \Psi_j \\ \text{avec} \quad \underline{\sigma}_j(\underline{x}) &= \sum_{i=0}^{P-1} \sum_{k=0}^{P-1} \frac{d_{ijk}}{\mathrm{E}[\Psi_k^2]} (\alpha_i \boldsymbol{D}_1 + \beta_i \boldsymbol{D}_2) \cdot \underline{\varepsilon}_k(\underline{x}) \end{aligned} \tag{3.89}$$

III.3.7 Conclusion

Les développements précédents montrent que, quels que soient les paramètres considérés comme aléatoire, le vecteur des déplacements nodaux $\underline{U}$ et les tenseurs de déformations et de contraintes en tout point $\underline{x}$ peuvent s'écrire sous la forme d'un développement sur le chaos polynomial. Ainsi on note dans la suite de façon générique toute quantité scalaire calculée par le modèle mécanique (composante de déplacement, de déformation ou de contrainte) et on note son développement, désormais connu, sous la forme :

$$S = \sum_{j=0}^{P-1} s_j \Psi_j \tag{3.90}$$

III.4 Post-traitements

III.4.1 Introduction

Une fois la réponse mécanique du système $\underline{S}$ écrite dans la base du chaos polynomial, plusieurs post-traitements sont possibles. Tous ces post-traitements vont s'effectuer sur une expression analytique et ne coûtent presque rien en terme de temps de calcul. On peut ainsi se focaliser sur une analyse en tendance centrale (les premiers moments statistiques de la réponse) ou bien effectuer des analyses de fiabilité (et donc s'intéresser aux queues de distribution) (*cf.* figure III.9 pour voir où se situent les zones d'intérêt [CGCP04]). La densité de probabilité de la réponse peut également être obtenue de différentes manières.

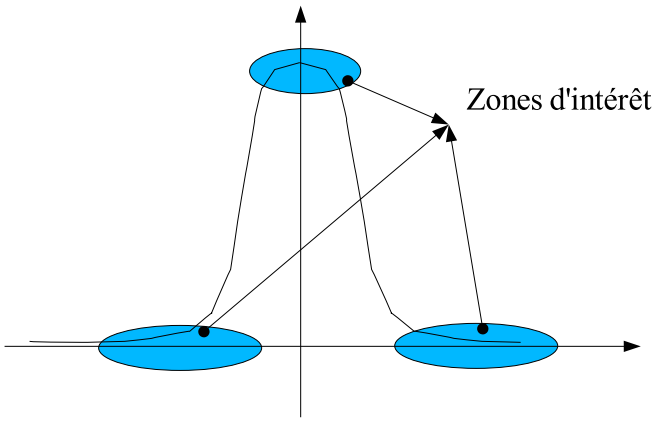


Fig. III.9 – Zones d'intérêt pour le calcul des moments statistiques et les analyses de fiabilité

III.4.2 Calcul des moments statistiques

Considérons une quantité scalaire S résultant du calcul aux éléments finis stochastiques (un déplacement nodal, une composante de déformations en un point, etc.) :

$$S = \sum_{j=0}^{P-1} s_j \Psi_j \tag{3.91}$$

A partir de l'équation (3.91), on peut calculer les moments statistiques de la quantité choisie.
En particulier, la moyenne est donnée par :

$$\mathrm{E}[S] = s_0 \tag{3.92}$$

La variance de S s'écrit :

$$\mathrm{Var}[S] = \sigma_S^2 = \sum_{i=1}^{P-1} \mathrm{E}[\Psi_i^2] s_i^2 \tag{3.93}$$

De même les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement valent respectivement :

$$\delta_S = \frac{1}{\sigma_S^3} \sum_{i=1}^{P-1} \sum_{j=1}^{P-1} \sum_{k=1}^{P-1} d_{ijk} s_i s_j s_k \tag{3.94}$$

$$\kappa_S = \frac{1}{\sigma_S^4} \sum_{i=1}^{P-1} \sum_{j=1}^{P-1} \sum_{k=1}^{P-1} \sum_{l=1}^{P-1} \mathrm{E}[\Psi_i \Psi_j \Psi_k \Psi_l] s_i s_j s_k s_l \tag{3.95}$$

Notons que dans les deux équations précédentes, de nombreux coefficients sont nuls, ce qui limite le temps de calcul effectif.

III.4.3 Analyse de fiabilité

La fiabilité des structures cherche à calculer la probabilité de défaillance d'une structure en tenant compte de la variabilité de paramètres (géométrie, matériau, chargement). Les paramètres sont représentés par des variables aléatoires. Soit $\underline{X}$ le vecteur aléatoire les regroupant, dont on se donne la densité de probabilité conjointe $f_{\underline{X}}(\underline{x})$. Soit $S(\underline{X})$ la réponse mécanique du système (déplacements, déformations, contraintes, etc.). Pour chaque mode de défaillance de la structure, une fonction d'état limite $g(\underline{X}, S(\underline{X}))$ est définie dans l'espace des paramètres. Par convention, le domaine de sûreté est défini par $D_s = \{\underline{X} | g(\underline{X}, S(\underline{X})) > 0\}$, et le domaine de défaillance par $D_f = \{\underline{X} | g(\underline{X}, S(\underline{X})) \leq 0\}$. La frontière $\{g(\underline{X}, S(\underline{X})) = 0\}$ est la *surface d'état limite*.
La probabilité de défaillance P_f est donnée par :

$$P_f = \mathrm{Prob}\left[g(\underline{X}, S(\underline{X})) \leq 0\right] = \int_{g(\underline{X}, S(\underline{X})) \leq 0} f_{\underline{X}}(\underline{x}) d\underline{x} \tag{3.96}$$

Le calcul de cette intégrale n'est pas possible analytiquement car le domaine de défaillance est défini implicitement à partir de $S(\underline{X})$ qui est donné par le calcul aux éléments finis. Lorsqu'on a effectué au préalable une analyse du problème par la méthode des éléments finis stochastiques, on dispose du développement de la réponse sur le chaos polynomial. Toute fonction d'état limite s'exprime donc de façon approchée sous la forme :

$$g(S(\underline{X})) \approx g\left(\sum_{j=0}^{P-1} S_j \Psi_j\right) \tag{3.97}$$

Par exemple, si l'on considère un état limite de service lié au dépassement d'un seuil u_S par le déplacement au noeud i_0, on peut mettre la fonction d'état limite sous la forme :

$$g(S(\underline{X})) = u_S - u^{i_0} = u_S - \sum_{j=0}^{P-1} u_j^{i_0} \Psi_j \tag{3.98}$$

Notons que si la fonction d'état limite est polynomiale en S, elle est également polynomiale en les variables gaussiennes $\{\xi_1, \cdots, \xi_M\}$ sur lesquelles est basé le chaos polynomial. La fonction d'état limite peut ainsi être considérée comme une surface de réponse. Elle est alors directement définie analytiquement dans un espace de variables aléatoires gaussiennes centrées réduites, dit *espace réduit*. On peut alors appliquer les méthodes FORM/SORM (annexe C) pour trouver l'indice de fiabilité β et une approximation de la probabilité de défaillance :

$$P_{f,FORM} = \Phi(-\beta) \tag{3.99}$$

$$P_{f,SORM} = \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1-\beta\kappa_i}} \tag{3.100}$$

les κ_i étant les courbures principales de l'hyperparaboloïde résultant de la méthode SORM, comptées positives lorsque la concavité contient l'origine (formule de Breitung [Lem05]).

III.4.4 Calcul de la densité de probabilité

Dans cette sous-section différentes méthodes d'obtention de densités de probabilité sont présentées. Elles sont toutes utilisables pour tracer la densité de probabilité de la réponse de S. Il existe d'autres méthode pour tracer des densités de probabilité comme l'utilisation de logspline ou la représentation à noyaux [IG96].

a) Simulation de Monte Carlo

Le tracé de la densité de probabilité d'une variable aléatoire X peut se faire par simulation de Monte Carlo. C'est la méthode la plus facile à mettre en œuvre.

Première approche

On considère n tirages $\{x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}\}$ de X. Le principe de cette représentation est de regrouper les observations *proches*. Pour cela, on se fixe une borne inférieure de l'échantillon $a_0 < \min(\{x_1, \cdots, x_n\})$ et une borne supérieure $a_k > \max(\{x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}\})$. On partitionne l'intervalle $]a_0, a_k]$ en k intervalles $]a_{i-1}, a_i]$ appelés **classes**. La largeur de la classe i $\Delta_i = a_i - a_{i-1}$ est en général constante et égale à $\frac{a_k - a_0}{k}$. Le nombre de classes peut être défini à l'aide de la règle de Sturges [IG96] : $k = 1 + \log_2(n)$.

On appelle **effectif** de la classe i le nombre d'observations appartenant à cette classe :

$$n_i = \sum_{j=1}^{n} 1_{]a_{i-1}, a_i]}(x_j) \tag{3.101}$$

La **fréquence** (ou fréquence relative) de la classe i est n_i/n. L'**histogramme** est la figure consituée des rectangles dont les *bases* sont les classes et dont les surfaces sont égales aux fréquences de ces classes. Autrement dit, la *hauteur* du i^{eme} rectangle est $\frac{n_i}{n\Delta_i}$.

Amélioration de la première approche

L'idée de cette amélioration [Yu03] est de créer plusieurs histogrammes ayant la même largeur de classes Δ_i mais différentes origines (appelées ancrages) a_0 et de moyenner ces histogrammes. Le résultats est un histogramme lissé qui estimera la densité de probabilité de la variable aléatoire. Pour construire cette moyenne, on dispose d'un ensemble de m histogrammes $\{h_1, \cdots, h_m\}$ ayant des largeurs de classes Δ_i constantes. Les origines de ces histogrammes sont données par la séquence :

$$x'_0 = x_0 + 0, x_0 + \frac{h}{m}, x_0 + \frac{2h}{m}, \cdots, x_0 + \frac{(m-1)h}{m} \tag{3.102}$$

La moyenne des histogrammes est alors obtenue par :

$$h_{moy} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} h_i(x) \tag{3.103}$$

b) A partir de la fonction de répartition

Première méthode

D'après la transformation isoprobabiliste, on peut écrire $F_X(X) = \Phi(\xi)$ soit encore $X = T(\xi)$. Nous avons ainsi : $F_X(T(\xi)) = \Phi(\xi)$. Or la densité de probabilité d'une variable aléatoire est la dérivée de sa fonction de répartition. Cette dérivée est calculée numériquement par différence finies.

Deuxième méthode

Si $X = T(\xi)$ est une fonction monotone et dérivable, alors $\xi = T^{-1}(X)$ donne une solution unique et on a :

$$f_X(x) = \left. \frac{\varphi(\xi)}{|T'(\xi)|} \right|_{\xi = T^{-1}(x)} \tag{3.104}$$

Si l'équation $X = T(\xi)$ donne plusieurs racines réelles ξ_i, alors

$$f_X(x) = \sum_i \frac{\varphi(\xi_i)}{|T'(\xi_i)|} \tag{3.105}$$

c) A partir de plusieurs analyses FORM

La densité de probabilité du déplacement nodal (aléatoire) u^{i_0} peut être déterminée à l'aide d'une analyse de sensibilité dans le cadre de FORM. De l'équation (3.98), nous avons :

$$P_f = \mathrm{P}(\zeta \leq u^{i_0}) = 1 - F_{i_0}(\zeta) \tag{3.106}$$

où F_{i_0} est la fonction de répartition de u^{i_0}. Si ζ désigne un paramètre apparaissant dans la fonction d'état limite, on montre d'après (3.99) :

$$\frac{\mathrm{d}P_f}{\mathrm{d}\zeta} = -\varphi(\beta)\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\zeta} \tag{3.107}$$

En considérant le seuil ζ comme paramètre dans (3.98), il vient :

$$\frac{\mathrm{d}P_f}{\mathrm{d}\zeta} = -\varphi(\beta(\zeta))\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\zeta} \tag{3.108}$$

Si $f_{i_0}(\zeta)$ désigne la densité de probabilité du déplacement nodal u_{i_0}, on a d'après (3.106) et (3.108) :

$$f_{i_0}(\zeta) = \frac{\mathrm{d}F_{i_0}(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta} = -\frac{\mathrm{d}P_f}{\mathrm{d}\zeta} = \varphi(\beta(\zeta))\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\zeta} \tag{3.109}$$

L'analyse de sensibilité aux paramètres dans le cadre de la méthode FORM donne [DM96] :

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\zeta} = \frac{1}{\|\nabla_{\boldsymbol{\xi}} g(\zeta, \underline{S}(\Psi_j(\{\xi_i\}_{i=1}^M)))\|} \cdot \frac{\partial g}{\partial \zeta} \tag{3.110}$$

Dans cette expression, le gradient au dénominateur est calculé au point de conception donné par la méthode FORM. D'après (3.98), $\frac{\partial g}{\partial \zeta} = 1$, donc l'équation (3.108) se simplifie finalement en :

$$f_{i_0}(\zeta) = \frac{\varphi(\beta(\zeta))}{\|\nabla_{\boldsymbol{\xi}} g(\zeta, \underline{S}(\Psi_j(\{\xi_i\}_{i=1}^M)))\|} \tag{3.111}$$

Ainsi, pour calculer la densité de probabilité d'un déplacement nodal, des analyses FORM sont réalisées pour différents seuils ζ. Cette méthode peut être également appliquée à toute quantité fournie par le post-traitement (composante de déformation ou contrainte). Cependant, il ne s'agit que d'une approximation de la densité au sens de FORM et non une densité exacte (aux erreurs numériques près).

III.4.5 Conclusions

Dans cette section, on a vu que le calcul des moments statistiques de la réponse se fait de manière analytique à partir des coefficients du développement de la réponse mécanique dans la base du chaos polynomial. A partir de ce développement, on peut également définir une fonction d'état limite pour des analyses de fiabilité. Ces analyses de fiabilité peuvent être effectuées en utilisant les méthodes d'approximation FORM/SORM ou des méthodes de simulation. La fonction d'état limite étant analytique, le coût de calcul de ces analyses est insignifiant par rapport au calcul des coefficients de la réponse. On peut également calculer la densité de probabilité de la réponse de différentes manières (par simulation, à partir de la fonction de répartition ou d'analyses FORM successives). La figure III.10 rassemble les différents post-traitements disponibles à partir du développement de la réponse dans le chaos polynomial.

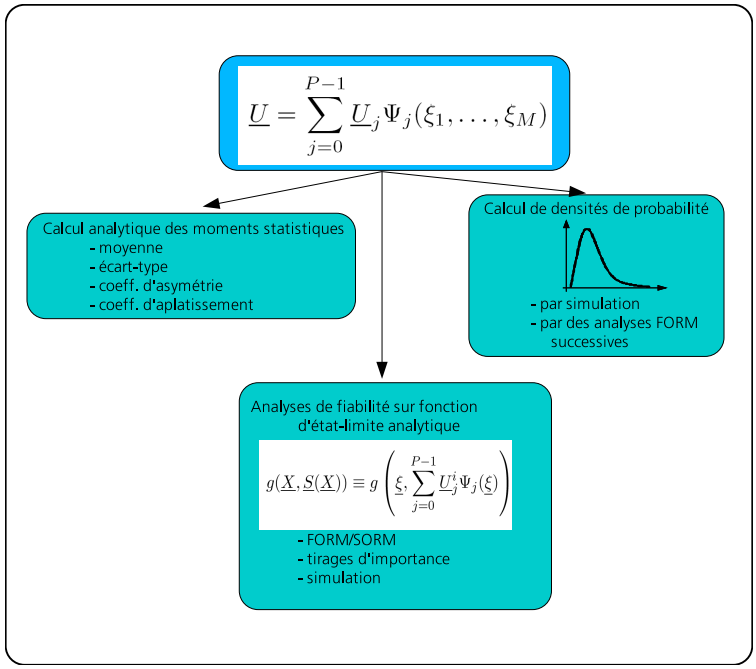


Fig. III.10 – Post-traitements disponibles avce le développement de la réponse sur le chaos polynomial

III.5 Application : Tassement d'une fondation

On applique la méthode précédente (Méthode des éléments finis stochastiques baptisée MEFS dans la suite) à un cas de mécanique élastique linéaire : le tassement d'une fondation. On considère que le module d'Young du matériau et le chargement sont représentés par des variables aléatoires.

III.5.1 Position du problème

On considère une couche de sol linéairement élastique d'épaisseur t reposant sur un substratum rigide, soumise à une pression P appliquée sur un segment de longueur $2B$ de sa surface libre. Le coefficient de Poisson du sol est de $0,3$, le module d'Young est de 50 MPa. Les valeurs numériques utilisées dans le calcul aux éléments finis sont données dans le tableau III.17. Le schéma de la fondation ainsi que le maillage utilisé sont représentés sur la figure III.11. Les éléments utilisés sont des quadrangles QUAD4 linéaires. Le maillage est constitué de 99 noeuds et 80 éléments. Le problème est traité en déformations planes. Les déplacements horizontaux des bords droit et gauche sont imposés nuls ainsi que les déplacements horizontaux et verticaux sur la ligne horizontale inférieure de la fondation. Avec ces paramètres, le tassement maximal calculé est $u_{max} = -5,49\,\text{cm}$, obtenu au noeud supérieur gauche du maillage. Cet exemple va être utilisé dans différents cas pour valider la méthode.

Tab. III.17 – Paramètres du modèle déterministe de la fondation.

Paramètre	Notation	Valeur
Epaisseur de la couche de sol	t	30 m
Largeur de la fondation	$2B$	10 m
Pression appliquée	P	0,2 MPa
Module d'Young	E	50 MPa
Coefficient de Poisson	ν	0,3
Largeur du maillage	L	60 m

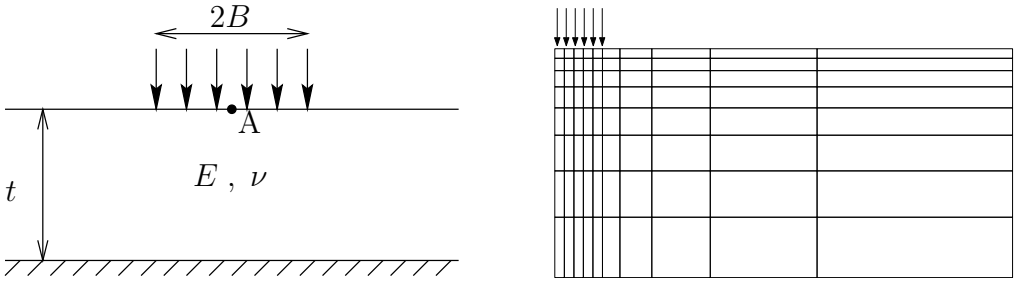


Fig. III.11 – Schéma de la fondation et maillage associé

III.5.2 Résultats

Considérons que la pression P est représentée par une variable aléatoire suivant une loi de Weibull de moyenne 0,2 MPa et de coefficient de variation 30 %. Le module d'Young supposé homogène est représenté par une variable aléatoire lognormale de moyenne 50 MPa et de coefficient de variation 20 %. Le coefficient de Poisson du sol

est supposé constant et vaut 0,3.
Compte tenu du comportement élastique du massif de sol, le tassement maximal U^{i_0} est inversement proportionnel au module d'Young E et proportionnel au chargement P, soit :

$$U^{i_0} = \chi \frac{P}{E} \tag{3.112}$$

Dans cette section, le coefficient χ est calculé à partir des valeurs moyennes qui conduisent à un tassement maximal de -5,49 cm, soit $\chi = -1372,5$ m.

a) Calcul des moments statistiques de la réponse

Dans ce paragraphe, nous allons comparer les quatre premiers moments statistiques de la réponse donnés par MEFS (méthode directe de résolution) avec ceux donnés par une simulation de Monte Carlo (10000 tirages) réalisée à l'aide de Proban [Det00] à partir de l'équation (3.112). Ces résultats sont reportés dans le tableau III.18. Pour la résolution hiérarchique, le nombre entre parenthèses est l'ordre de première résolution, à partir de cet ordre, les coefficients des ordres supérieurs (jusqu'à l'ordre p) sont calculés les uns après les autres à l'aide de la méthode de projection.

Tab. III.18 – Fondation homogène : Comparaison des 4 premiers moments statistiques du déplacement maximal

Moment	Simulation	MEFS directe			MEFS hiérarchique		
		$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=3(2)$	$p=4(2)$	$p=4(3)$
U/u_{max}	1,05	1,04	1,04	1,04	1,02	1,02	1,02
Coef. Var. (en %)	37	37	37	37	37	37	37
Asymétrie	-0,55	-0,51	-0,56	-0,56	-0,47	-0,46	-0,56
Aplatissement	3,55	3,49	3,68	3,69	3,21	3,27	3,68

On remarque que les deux premiers moments statistiques sont calculés avec une grande précision dès l'ordre 2. Les ordres 3 et 4 donnent des résultats équivalents lorsqu'on utilise la méthode de résolution directe. En revanche, la méthode hiérarchique fournit de bons résultats pour les deux premiers moments mais de moins bons résultats pour les moments d'ordre 3 et 4. Le tableau III.19 donne les temps de résolution du problème (l'unité de temps est la durée d'un calcul aux éléments finis déterministe). La version du logiciel Matlab utilisé est *6.1 release 12.1* [Mat01]. On remarque que les temps de calcul associés à la méthode hiérarchique sont légèrement supérieurs à ceux de la méthode directe. Ceci est dû à la *petite* taille du système n'ayant que deux paramètres aléatoires.

Tab. III.19 – Fondation homogène : Temps de calcul

	MEF	MEFS classique			MEFS hiérarchique		
		$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=3(2)$	$p=4(2)$	$p=4(3)$
Temps	1	3	4,7	7,7	5,3	7,7	9,7

b) Analyse de fiabilité

On s'intéresse maintenant à la fiabilité de la fondation en service vis-à-vis d'un critère de tassement admissible. La fonction d'état limite associée s'écrit :

$$g(\mathbf{U}) = u_S - U^{i_0} \tag{3.113}$$

où U^{i_0} est le déplacement vertical du nœud supérieur gauche et u_S est la valeur seuil à ne pas dépasser. En utilisant (3.112), la fonction d'état limite (3.113) se réécrit :

$$g(\mathbf{U}) = u_S - \chi\frac{P}{E} \tag{3.114}$$

Ce problème peut-être résolu en utilisant la méthode FORM. Les résultats obtenus par le logiciel PROBAN sont donnés dans le tableau III.20, colonne 2. Remarquons que dans un cas général où l'on ne disposerait pas d'une expression analytique de g telle que l'équation (3.114), il est toujours possible de résoudre le problème de fiabilité associé à (3.113) par couplage mécano-fiabiliste direct entre le code aux éléments finis et le code fiabiliste [DK88], [LM00].

Tab. III.20 – Fondation homogène : Indice de fiabilité β

Seuil (cm)	β_{ref}	β_{MEFS}			Erreur β_{MEFS}/β_{ref} en %		
	FORM	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
-7 (d)	0,6342	0,6776	0,6861	0,6862	6,40	7,56	7,57
-7 (h)	0,6342	-	0,6691	0,6707	-	5,22	5,44
-8 (d)	1,0545	1,1010	1,1062	1,1071	4,22	4,67	4,75
-8 (h)	1,0545	-	1,0942	1,1008	-	3,62	4,21
-10 (d)	1,8094	1,8693	1,8520	1,8534	3,20	2,30	2,37
-10 (h)	1,8094	-	1,8928	1,9008	-	4,41	4,80
-15 (d)	3,3153	3,4811	3,3352	3,3246	4,76	0,59	0,28
-15 (h)	3,3153	-	3,7230	3,5932	-	10,95	7,73
-20 (d)	4,4618	4,8202	4,4855	4,4436	7,44	0,53	0,41
-20 (h)	4,4618	-	5,4049	4,9009	-	17,44	8,96

La solution MEFS est par ailleurs calculée, ce qui permet d'approximer (3.113) par l'expression *analytique*.

$$g_{MEFS}(\xi_1, \xi_2) = u_S - \sum_{j=0}^{P-1} U_j^{i_0} \, \Psi_j(\xi_1, \xi_2) \tag{3.115}$$

qui s'apparente à une surface de réponse polynomiale.
On peut ensuite utiliser FORM pour calculer l'indice de fiabilité β_{MEFS}. Les résultats sont résumés dans le tableau III.20 pour différentes valeurs du seuil u_S, différents ordres d'approximation polynomiale de la réponse ($p = 2, 3, 4$) et pour les deux méthodes de résolution : directe (d) et hiérarchique (h). Pour la méthode hiérarchique, une pré-résolution a été faite à l'ordre 2.
Avec une résolution directe, on remarque que les ordres 3 et 4 donnent en général des résultats équivalents. Cependant, pour des β faibles, l'ordre 2 fournit les mêmes résultats que ceux des ordres supérieurs. Mais on ne connait pas à l'avance la valeur que prendra l'indice de fiabilité : on doit donc privilégier l'ordre qui donne l'erreur la plus faible sur l'ensemble des β, c'est-à-dire à l'ordre 3. Avec une résolution hiérarchique, on obtient de meilleurs résultats pour les faibles indices de fiabilité (β inférieur à 2) qu'avec la méthode directe. En revanche, pour des indices de fiabilité plus élevés, c'est la méthode directe de résolution qui fournit les meilleurs résultats.
Le tableau III.21 rassemble les indices de fiabilité de la fondation homogène calculés par la méthode d'échantillonage d'importance (*Importance Sampling*) [DM96] et annexe C). Le coefficient de variation de la simulation est 4,2%. Une première résolution FORM est faite, puis une simulation de Monte Carlo (2000 tirages) est réalisée autour du point de conception trouvé. On remarque que les résultats obtenus par échantillonage d'importance sont globalement meilleurs que ceux obtenus avec la méthode FORM, ce qui est du à la correction de l'effet de courbure avec la simulation. Cependant les tendances générales sont les mêmes, *i.e.* les meilleurs résultats sont obtenus avec la méthode de résolution directe aux ordres 3 et 4 pour des indices de fiabilité moyens.

c) Densité de probabilité du tassement maximal

Les figures III.12 et III.13 nous montrent que les densités de probabilités de la réponse du système données par MEFS convergent en augmentant l'ordre. Ces densités ont été calculées en faisant une analyse de sensibilité avec la méthode FORM pour différentes valeurs du seuil u_S. Une telle analyse dure 13 s. Les densités obtenues à l'ordre 3 et 4 en résolution directe sont confondues. Afin de pouvoir comparer les densités de probabilité des réponses dans les queues de distribution, nous avons tracé les logarithmes des densités de probabilités sur la figure III.14. Nous obtenons les mêmes résultats comparatifs en queue de distribution qu'au milieu.

Tab. III.21 – Fondation homogène : Indice de fiabilité β calculé par Importance Sampling

Seuil (cm)	$\beta_{ref_{IS}}$	$\beta_{MEFS_{IS}}$			Erreur $\beta_{MEFS_{IS}}/\beta_{ref_{IS}}$ en %		
	IS	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
-7 (d)	0,6806	0,7086	0,7300	0,7386	3,95	6,76	7,85
-7 (h)	0,6806	-	0,7092	0,6775	-	4,03	0,45
-8 (d)	1,1015	1,1196	1,1106	1,1377	1,62	0,82	3,18
-8 (h)	1,1015	-	1,1286	1,1462	-	2,40	3,90
-10 (d)	1,8552	1,9161	1,8870	1,8799	3,18	1,69	1,31
-10 (h)	1,8552	-	1,9146	1,9291	-	3,10	3,83
-15 (d)	3,3563	3,5101	3,3725	3,3563	4,38	0,48	0,00
-15 (h)	3,3563	-	3,7615	3,6294	-	10,77	7,52
-20 (d)	4,4987	4,8360	4,5153	4,4606	6,97	0,36	0,85
-20 (h)	4,4987	-	5,4694	4,9218	-	17,74	8,60

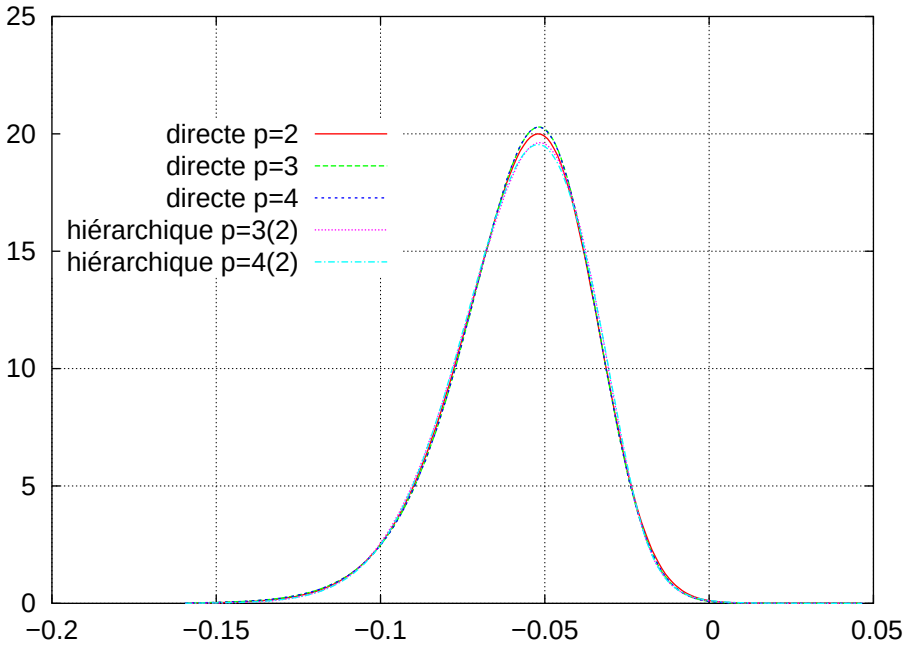


Fig. III.12 – Fondation homogène : Densités de probabilité du tassement maximal (en m) obtenues par la MEFS à différents ordres

d) Déformations

Les figures III.15 et III.16 présentent respectivement la valeur moyenne des déformations ε_{yy} et l'écart-type de ε_{yy} à l'ordre 4. On remarque que les isovaleurs

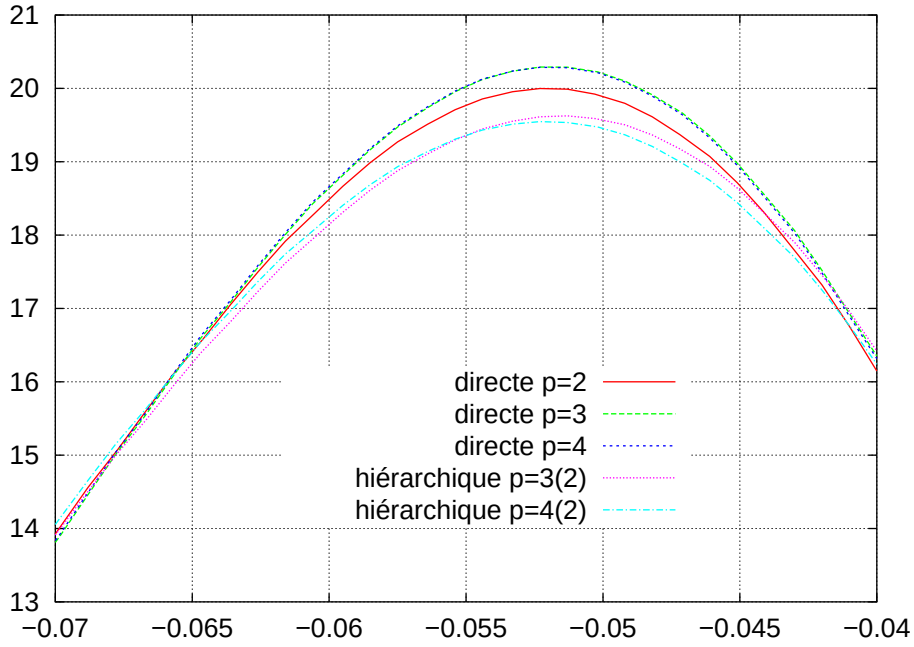


Fig. III.13 – Fondation homogène : Densités de probabilité du tassement maximal (en m) obtenues par la MEFS : zoom autour de la moyenne

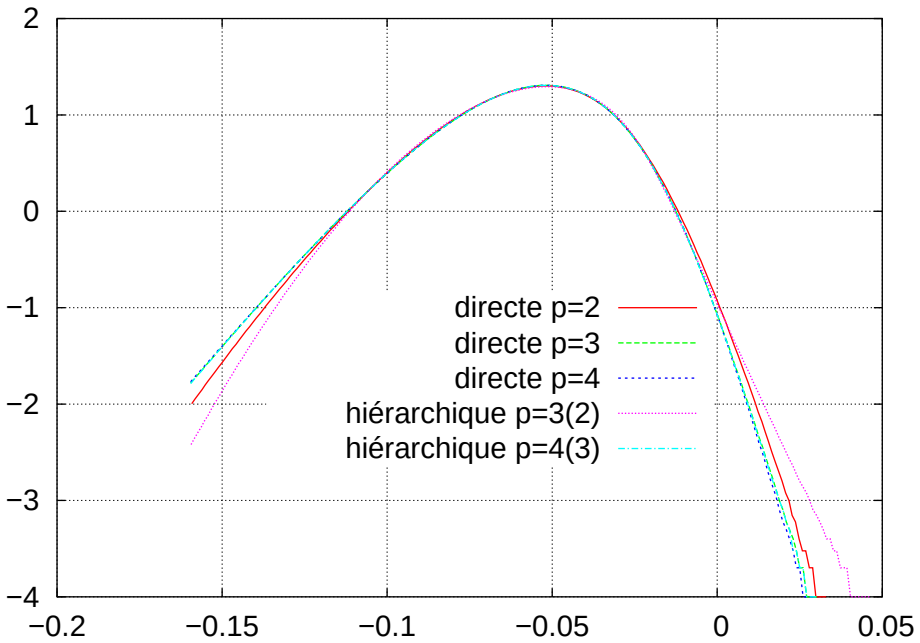


Fig. III.14 – Fondation homogène : Logarithme des densités de probabilité du tassement maximal (en m) obtenues par la MEFS

des écart-types des déformations ε_{yy} sur la fondation ont la même allure que celles de leurs valeurs moyennes.

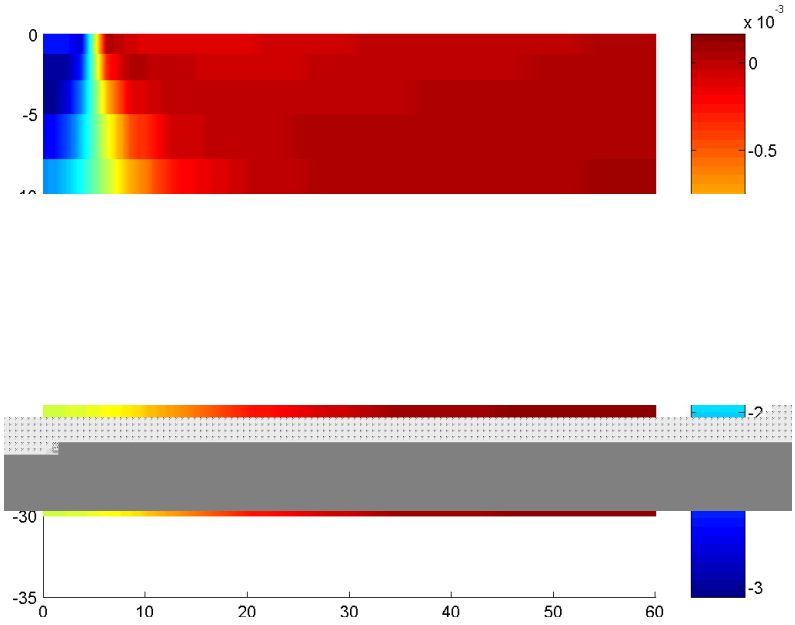


Fig. III.15 – Fondation homogène : Déformation moyenne ε^0_{yy} de la fondation à l'ordre 4

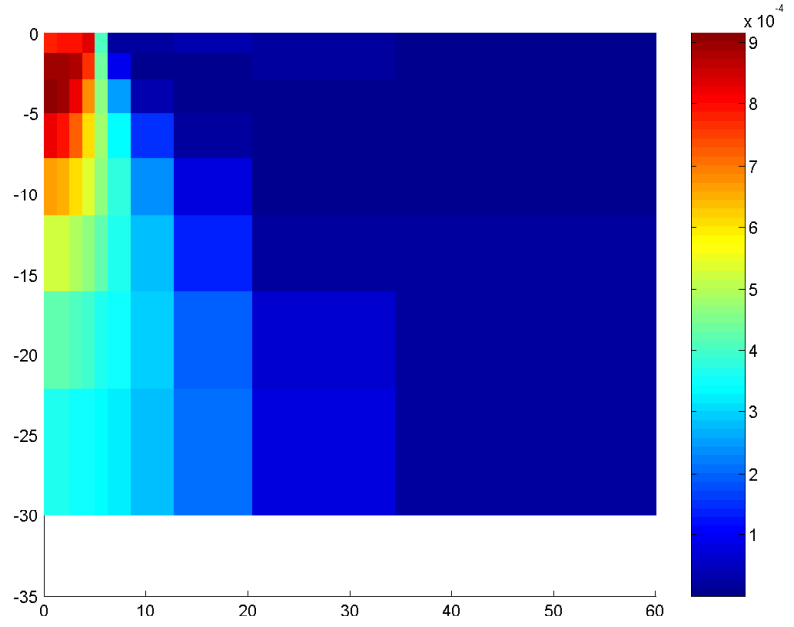


Fig. III.16 – Fondation homogène : Ecart-type de la déformation ε^0_{yy} de la fondation à l'ordre 4

III.5.3 Conclusion

L'exemple d'application présenté dans ce chapitre permet de montrer que la méthode des éléments finis stochastiques est applicable dans le cadre d'un problème de mécanique élastique linéaire, ici bi-dimensionnel. Les résultats obtenus, tant du point de vue statistique que fiabiliste sont satisfaisants par rapport aux solutions de référence, obtenues de manière analytique ou par simulation. La résolution directe à l'ordre 3 donne globalement les meilleurs résultats. La méthode hiérarchique avec pré-résolution à l'ordre 2 apparaît pertinente. La méthode hiérarchique avec pré-résolution à l'ordre 1, dont les résultats sont très imprécis, n'a pas été présentée ici.

III.6 Conclusions et limitations

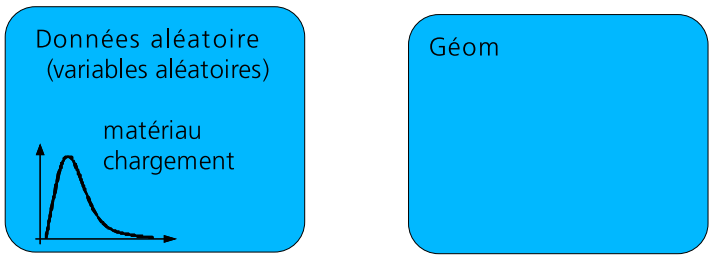
Dans cette section, nous avons proposé une méthode d'éléments finis stochastiques, qui s'appuie sur le développement de la réponse sur le chaos polynomial. Cette méthode permet de prendre en compte des variables aléatoires en nombre quelconque et de type quelconque pour représenter l'aléa des paramètres du matériau et du chargement. Pour ce faire, nous avons développé ces variables aléatoires d'entrée sur la base du chaos polynomial grâce à deux méthodes (de projection et de régression). Une fois le problème résolu, plusieurs post-traitements sont possibles (calcul des moments de la réponse et analyse de fiabilité). Cette méthode a été appliquée sur un exemple (concernant le tassement d'une fondation). Les résultats montrent que cette méthode permet de bien calculer les quatre premiers moments de la réponse et que des analyses de fiabilité sont possibles. Ces résultats ont été publiés dans [SBL03b, SBL03a, SBL04, SBL05].

Il est tout à fait possible d'intégrer la modélisation de certains paramètres par des champs aléatoires. Ces champs doivent être discrétisés (par développement de Karhunen-Loève, comme au chapitre 2, ou avec une tout autre méthode, par exemple EOLE [LD93]). Une fois les variables et champs aléatoires d'entrée discrétisés sur le chaos polynomial, la MEFS et les différents post-traitements proposés s'applique. Des variables aléatoires corrélées peuvent également être utilisées. Il suffit de les décorréler en utilisant les transformations de Rosenblatt ou de Nataf [Lem05]. Une fois ces variables décorrélees, le reste de la méthode s'applique à l'identique.

Cependant en l'état, la MEFS proposé reste difficilement applicable à des problèmes non linéaires, même si des travaux récents [Kee04] s'attaquent à ce problème.

Enfin, et c'est la limitation la plus sévère à l'utilisation de la méthode dans un contexte industriel, la MEFS nécessite une implémentation spécifique à chaque type de modélisation dans le code de calcul. Pour lever ces difficultés, une nouvelle classe de méthodes baptisées *non intrusives* est maintenant présentée.

La figure III.17 présente un schéma récapitulatif pour la méthode des éléments finis stocahstiques.



Chapitre -IV-

Méthodes non intrusives

Sommaire

IV.1 Introduction 72
IV.2 Méthode de projection 72
IV.2.1 Présentation 72
IV.2.2 Méthodes de simulations 73
IV.2.3 Méthode de quadratures de Gauss 74
IV.2.4 Conclusions 76
IV.3 Méthodes de régression 76
IV.3.1 Méthode de collocation 76
IV.3.2 Méthode de surface de réponse 78
IV.3.3 Méthode de régression 80
IV.3.4 Conclusions 84
IV.4 Equivalence entre les deux approches [Sud05] 84
IV.5 Utilisation des méthodes non intrusives 85
IV.5.1 Méthode de projection 85
IV.5.2 Méthode de régression 88
IV.5.3 Conclusions 89
IV.6 Conclusions 90

IV.1 Introduction

Le chapitre III a montré que la méthode des éléments finis stochastiques permettait de prendre en compte dans le cas de la mécanique linéaire l'aléa sur les propriétés du matériau et sur le chargement par des variables aléatoires en nombre quelconque et de type quelconque. Les principaux défauts de cette méthode sont le fait qu'elle nécessite une implémentation spécifique et son champ d'application est limité au cas linéaire. La méthode des éléments finis stochastiques présentée dans le chapitre III a montré que toute composante S de la réponse $\underline{S}$ d'un système peut être exprimée dans la base du chaos polynomial sous la forme :

$$S(\theta) = \sum_{j=0}^{P-1} s_j \Psi_j(\{\xi_k(\theta)\}_{k=1}^{M}) \tag{4.1}$$

où S_j sont des coefficients à déterminer, $\{\Psi_0, \cdots, \Psi_{P-1}\}$ est la base du chaos polynomial et $\{\xi_1, \cdots, \xi_M\}$ sont les variables aléatoires gaussiennes centrées réduites ayant servies à développer chacune des variables aléatoires d'entrée du système. Les méthodes non intrusives sont des méthodes analogues aux méthodes de projection et de régression présentées au chapitre précédent et qui ont permis de développer des variables aléatoires sur la base des polynômes d'Hermite. Dans un premier temps, nous allons présenter une méthode dite de *projection* basée sur l'orthogonalité de la base, qui permet de calculer les coefficients S_j à partir de calculs aux éléments finis déterministes et de calculs analytiques. Ensuite, nous allons présenter deux méthodes de *régression* permettant de calculer ces coefficients. Les méthodes non intrusives de projection et de régression sont ensuite comparées. Enfin nous montrons comment utiliser pratiquement ces méthodes dans le cas d'une analyse aux éléments finis dans laquelle on considère plusieurs paramètres aléatoires.

IV.2 Méthode de projection

IV.2.1 Présentation

En utilisant l'orthogonalité de la base de l'espace de Hilbert des variables aléatoires réelles de variance finie $\mathcal{L}^2(\Theta, F, P)$, l'équation (4.1) donne :

$$S_j = \frac{\mathrm{E}\left[S \cdot \Psi_j\right]}{\mathrm{E}\left[\Psi_j^2\right]} \tag{4.2}$$

Le dénominateur de l'équation (4.2) est connu [SD00]. Le numérateur est l'espérance d'une fonction, il peut s'écrire sous forme d'intégrale :

$$\mathrm{E}\left[S\Psi_j\right] = \int_{\mathbb{R}^M} S(\underline{x})\Psi_j(\underline{x})\varphi_M(\underline{x})d\underline{x} \tag{4.3}$$

$\varphi_M(\underline{x}) = (2\pi)^{-M/2} e^{-\frac{1}{2}\|\underline{x}\|^2}$ étant la densité de probabilité multinormale de dimension M. Il existe différentes méthodes pour calculer une intégrale multi-dimensionnelle.

On remarque que cette méthode est analogue à celle utilisée pour développer des variables aléatoires sur la base des polynômes d'Hermite vue dans la section III.2. La différence est la base de projection et le fait que le problème dépend cette fois de plusieurs variables aléatoires (d'où l'utilisation du chaos polynomial). Les méthodes qui vont être utilisées pour calculer l'intégrale multi-dimensionnelle (4.3) vont donc être semblables à celle présentées dans la section III.2. Les premières méthodes, non présentées dans la section III.2, sont les différentes méthodes de simulation (Monte Carlo, d'Hypercube-Latin). Une autre méthode présentée dans ce chapitre, permettant de calculer une intégrale, est la méthode des quadratures de Gauss. La méthode est une extension de celle présentée précédemment du fait du caractère multi-dimensionnel de l'intégrale.

IV.2.2 Méthodes de simulations

Les méthodes de simulation sont les méthodes les plus simples qui permettent d'évaluer une intégrale complexe. En considérant un domaine d'aire unitaire, qui contient une surface complexe (*cf.* figure IV.1), la loi des grands nombres affirme que la surface de la forme est très voisine de la proportion du nombre de points qui tombe dans la surface considérée, lors d'un tirage uniforme non biaisé.

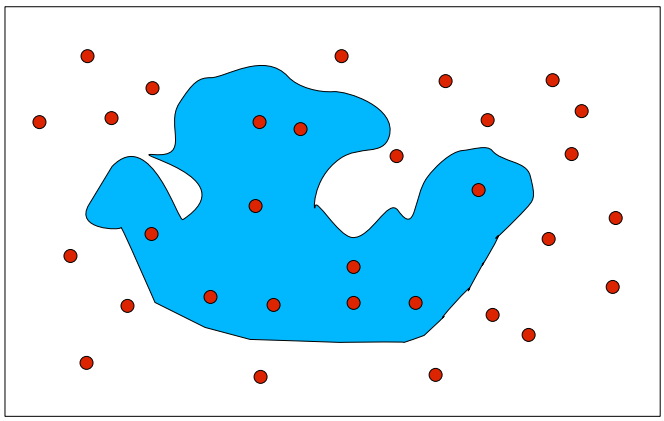


Fig. IV.1 – Intégration par la méthode de Monte Carlo

La simulation de Monte Carlo directe [Rub81, Mel99] est la méthode de simulation la plus facile à mettre en œuvre pour estimer une espérance ou une intégrale. Elle est basée sur la loi des grands nombres (la moyenne de réalisations indépendantes converge presque sûrement vers l'espérance mathématique). On cherche à estimer l'espérance de l'équation (4.3). Un estimateur Θ_N de I avec N

tirages $\{\underline{x}^{(1)}, \cdots, \underline{x}^{(N)}\}$ est défini par :

$$\Theta_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} S(\underline{x}^{(i)}) \Psi_j(\underline{x}^{(i)}) \tag{4.4}$$

Cet estimateur est sans biais : sa moyenne vaut $\mathrm{E}[S(\underline{x})\Psi_j(\underline{x})]$. Sa variance est donnée par :

$$\tilde{\sigma}_N^2 = \frac{1}{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} S^2(\underline{x}^{(i)}) \Psi_j^2(\underline{x}^{(i)}) - \Theta_N^2 \right] \tag{4.5}$$

La variance tend vers 0 lorsque le nombre de tirages N tend vers l'infini, ce qui signifie que la précision sur l'estimateur augmente avec le nombre de simulations réalisées mais converge en $\sqrt{N}$ seulement. On peut calculer, au fur et à mesure de la simulation, son coefficient de variation :

$$CV = \frac{\tilde{\sigma}_N}{\Theta_N} \tag{4.6}$$

Un coefficient de variation de 5% est en général visé.

L'annexe B présente deux autres méthodes de simulations : la simulation stratifiée et la méthode de l'hypercube latin. Ce méthodes permettent de répartir plus régulièrement les tirages et donc d'en diminuer le nombre.

[FRHP00] utilise une méthode de simulation de Monte Carlo (100000 tirages) pour évaluer la réponse d'une analyse vibratoire d'un choc non linéaire. La méthode de simulation stratifiée a été utilisée dans [GG02] pour calculer les coefficients recherchés. Dans [CGC04, CGCP04], c'est la méthode de l'hypercube latin qui a été choisie dans le cas du dimensionnement d'un portique.

IV.2.3 Méthode de quadratures de Gauss

Principe

Nous avons vu à la section III.2.2 que la méthode de quadratures de Gauss permet d'évaluer une intégrale par une somme pondérée :

$$I = \int_{\mathcal{D} \subset \mathbb{R}} f(x) W(x) dx \approx \sum_{k=1}^{K} w_k d(x_k) \tag{4.7}$$

Le produit tensoriel d'une telle formule en M dimensions s'écrit naturellement :

$$\int_{\mathcal{D} \subset \mathbb{R}} f(\underline{X}) W(\underline{X}) dx \approx \sum_{k_1=1}^{K} \cdots \sum_{k_M=1}^{K} w_{k_1} \cdots w_{k_M} f(x_{k_1}, \cdots, x_{k_M}) \tag{4.8}$$

En utilisant les poids et points d'intégration associés à la mesure gaussienne ($W(\underline{X}) \equiv \varphi_M(\underline{X})$), l'intégrale (4.8) peut-être approximée par :

$$\mathrm{E}\left[S\Psi_j\right] \approx \sum_{k_1=1}^{K} \cdots \sum_{k_M=1}^{K} w_{k_1} \cdots w_{k_M} S(X_1(\xi_{k_1}), \cdots, X_M(\xi_{k_M})) \Psi_j(\xi_{k_1}, \cdots, \xi_{k_M}) \tag{4.9}$$

où les $\{w_{k_1}, \cdots, w_{k_M}\}$ et $\{\xi_{k_1}, \cdots, \xi_{k_M}\}$ sont respectivement les poids et points d'intégration pour les M v.a.g.c.r. relatives aux variables aléatoires d'entrée du problème. Ces poids et points d'intégration sont ceux du schéma d'intégration unidimensionnel de la section III.2.2. On prend dans chaque dimension le même nombre K de points d'intégration. A partir de ces points d'intégration, on peut calculer par transformation isoprobabiliste (3.3) les valeurs des paramètres d'entrée $\{X_1(\xi_{k_1}), \cdots, X_M(\xi_{k_M})\}$ à partir desquels on calcule la réponse $\underline{S}$.
L'ordre du schéma K dans chaque direction s'évalue de la façon suivante : si la réponse $\underline{S}$ (Eq.4.1) était polynomiale d'ordre p, les termes à intégrer seraient polynomiaux de degré au plus égal à $2p$, et un schéma d'intégration d'ordre $K = p+1$ donnerait la solution exacte. On choisit donc dans tous les cas $K = p+1$ en fonction de p, degré maximal du développement de la réponse sur le chaos. Le tableau IV.1 présente le nombre d'appels à S en fonction du nombre M de variables aléatoires et de l'ordre du chaos polynomial p si l'on prend $K = p + 1$ points d'intégration. On remarque bien que lorsque le nombre de variables aléatoires augmente, le nombre total d'évaluation de la fonction S augmente exponentiellement et atteint des nombres non envisageables dans le cas où S est obtenu par des analyses éléments finis par exemple.

Tab. IV.1 – Nombre d'appels à la fonction S en fonction du nombre de variables aléatoires et de l'ordre du chaos polynomial

	Nombre des variables M					
Ordre du chaos p	1	2	3	4	5	6
2	3	9	27	81	243	729
3	4	16	64	256	1024	4096
4	5	25	125	625	3125	15625
5	6	36	216	1296	7776	46656

Utilisation

[Fie02] utilise la méthode de quadratures pour calculer les coefficients pour une analyse vibratoire d'un choc non linéaire. La conclusion de ce papier est que la convergence n'est pas garantie et que le nombre de calcul augmente considérablement avec le nombre de variables aléatoires. Une méthode de quadratures a également été utilisée par [KM03]. [LRN+02] utilise cette méthode non intrusive dans le cas d'un écoulement de convection naturelle. Il compare l'utilisation des quadratures de Gauss à celle de la méthode de simulation du latin-hypercube. Il conclut que l'erreur est moindre avec les quadratures.

IV.2.4 Conclusions

La méthode *non intrusive* de projection permet de calculer les coefficients du développement de la réponse sur le chaos polynomial à partir de calculs aux éléments finis déterministes et d'un post-traitement adéquat. Comme elle est basée sur la projection de la réponse sur la base du chaos polynomial, elle se réduit à l'évaluation d'une intégrale, qui peut être effectuée de différentes façons (simulations ou quadratures). Il faut noter que lorsque le nombre de variables aléatoires augmente, le nombre de calculs aux éléments finis déterministes nécessaire pour appliquer la méthode de quadratures est K^M, K étant le nombre de points d'intégration dans chaque dimension et M le nombre de variables aléatoires.

IV.3 Méthodes de régression

Le calcul des coefficients du développement de la réponse sur le chaos polynomial à partir d'un nombre fini de calculs aux éléments finis déterministes est un problème de régression. On doit trouver les coefficients qui permettent d'approximer au mieux la réponse d'un système par une expression analytique (développement sur le chaos polynomial) en un nombre fini de points. C'est le principe des surfaces de réponse, déjà utilisée en fiabilité des structures [Far89, RE93, Lem98, GMS+04]. On présente ici trois méthodes de régression, une première basée sur la méthode de collocation. Ensuite on présente la méthode de surface de réponse habituellement utilisée en fiabilité des structures et une méthode de minimisation au sens des moindres carrés qui utilise une autre base de projection.

IV.3.1 Méthode de collocation

Principe

La méthode de collocation a été utilisée pour calculer les coefficients du développement dans le chaos polynomial par [WTM96] et [TPPM97]. L'approximation d'une composante S de la réponse du système s'écrit :

$$\tilde{S}(\theta) = \sum_{j=0}^{P-1} s_j \Psi_j(\{\xi_k(\theta)\}_{k=1}^M) \tag{4.10}$$

On se donne P réalisations de $\{\{\xi_k^{(q)}\}_{k=1}^M, q = 1, \cdots, P\}$ appelés *points de collocation*. On en déduit les P réalisations du vecteur aléatoire des paramètres d'entrée $\{\underline{X}^{(1)}, \cdots, \underline{X}^{(P)}\}$ par transformation isoprobabiliste (Eq.(3.3)). Pour chaque réalisation, on évalue $S^{(i)} = S(\underline{X}^{(i)})$, où $S(\cdot)$ est une fonction qui calcule la réponse considérée. Elle peut être analytique ou algorithmique (le code aux éléments finis déterministe). Par ailleurs, on calcule par (4.10) les réalisations $\tilde{S}^{(i)}$ en fonction

des coefficients inconnus $\{s_j, j = 0, \cdots, P-1\}$. La méthode de collocation consiste à écrire l'égalité entre $S^{(i)}$ et $\tilde{S}^{(i)}$ pour chacune des P réalisations (figure IV.2) :

$$\tilde{S}^{(i)} = S^{(i)} \quad , \quad \forall i \in \{1, \cdots, P\} \tag{4.11}$$

ce qui peut s'écrire sous forme matricielle de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} \Psi_0(\{\xi_k^{(1)}\}_{k=1}^M) & \cdots & \Psi_{P-1}(\{\xi_k^{(1)}\}_{k=1}^M) \\ \vdots & & \vdots \\ \Psi_0(\{\xi_k^{(P)}\}_{k=1}^M) & \cdots & \Psi_{P-1}(\{\xi_k^{(P)}\}_{k=1}^M) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_0 \\ \vdots \\ S_{P-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S^{(0)} \\ \vdots \\ S^{(P)} \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

La résolution de ce système linéaire permet d'obtenir les coefficients $\{S_0, \cdots, S_{P-1}\}$ recherchés.

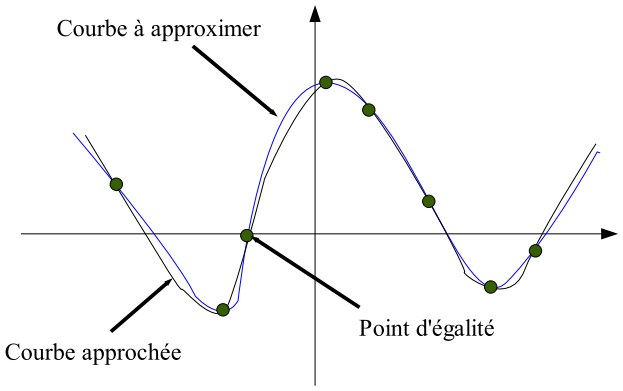


Fig. IV.2 – Principe de la méthode de collocation

Choix des points de collocation

Dans [WTM96] et [TPPM97], les points de collocation sont construits à partir des m racines du polynôme d'Hermite d'ordre $m = p + 1$, où p est de degré maximal des polynômes du chaos. Le système étant de taille P, il faut choisir exactement P points de collocation parmi les M-uplets contenant toutes les combinaisons possibles des m racines pour chaque variable $\{\xi_k(\theta)\}_{k=1}^M$. On ne peut garder l'ensemble des combinaisons des racines car le nombre de ces combinaisons augmente très rapidement (tableau IV.2). Pour en sélectionner une partie, [WTM96] choisissent les P M-uplets de racines ayant une plus grande probabilité d'apparition. Comme la densité de probabilité de ξ est la loi multinormale, cette sélection conduit à prendre les M-uplets de plus petite norme.

Conclusions

Cette méthode de régression permet bien de calculer les coefficients du développement de la réponse d'un système sur le chaos polynomial à partir d'un

Tab. IV.2 – Nombre des combinaisons possibles des racines pour les points de collocation

	Nombre des variables					
Nombre des racines	1	2	3	4	5	6
2	2	4	8	16	32	64
3	3	9	27	81	243	729
4	4	16	64	256	1024	4096
5	5	25	125	625	3125	15625

nombre fini de calculs aux éléments finis déterministes et d'un post-traitement judicieux. Par contre, on ne peut pas choisir le nombre de points de collocation, car ce nombre est imposé par la taille du chaos polynomial. Au final, la précision des résultats obtenus par une méthode de collocation est généralement mauvaise. L'idée d'augmenter le nombre de points de collocation conduit alors naturellement à l'utilisation de méthodes de régression. De plus, le fait d'imposer l'égalité entre les solutions exacte et approchée aux points de collocation est trop contraignant et la solution approchée peut être très différente de la solution exacte (figure IV.3).

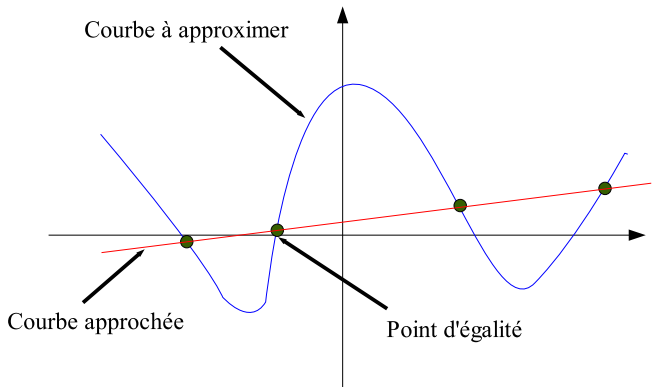


Fig. IV.3 – Problèmes avec la méthode de collocation

IV.3.2 Méthode de surface de réponse

Principe

La méthode de surface de réponse [Far89, RE93, Lem98, GMS+04] permet de calculer les coefficients du développement de la réponse sur une base polynomiale à l'aide d'une minimisation au sens des moindres carrés. La base du développement

de la réponse S retenue dans ces travaux est celle des polynômes du second degré :

$$S \approx \tilde{S} = \tilde{S}_0 + \sum_{i=1}^{M} \tilde{S}_i X_i + \sum_{i=1}^{M} \tilde{S}_{ii} X_i^2 + \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1, j\neq i}^{M} \tilde{S}_{ij} X_i X_j \tag{4.13}$$

où les coefficients $\{\tilde{S}_0, \tilde{S}_i, \tilde{S}_{ii}, \tilde{S}_{ij}\}$ sont les coefficients à déterminer qui correspondent respectivement aux termes *constant, linéaires, carrés et croisés.* En notant $\{P_0, \cdots, P_{pp-1}\}$ la base des polynômes du deuxième ordre où $pp = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ la dimension de cette base, on a :

$$\tilde{S} = \sum_{i=0}^{pp-1} S_i P_i \tag{4.14}$$

Les coefficients $\{S_0, \cdots, S_{pp-1}\}$ sont calculés par une minimisation au sens des moindres carrés après avoir choisi des points d'évaluation $\{\underline{X}^{(k)}, k = 1, \cdots, NF\}$ (qui constituent un plan d'expériences), pour lesquels on évalue $S^{(k)}$ par des calculs aux éléments finis déterministes. On doit donc minimiser vis-à-vis des coefficients $\{S_0, \cdots, S_{pp-1}\}$ la quantité suivante :

$$\Delta S = \sum_{k=1}^{NF} \left(S^{(k)} - \tilde{S}(\underline{X}^{(k)}) \right)^2 \tag{4.15}$$

On obtient un système de taille $p \times p$ à résoudre :

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{NF} P_0 P_0 & \cdots & \sum_{i=1}^{NF} P_0 P_{pp-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{NF} P_{pp-1} P_0 & \cdots & \sum_{i=1}^{NF} n P_{pp-1} P_{pp-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_0 \\ \vdots \\ S_{pp-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{NF} S^{(i)} P_0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{NF} S^{(i)} P_{pp-1} \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

Construction du plan d'expériences [Lem05]

Dans la méthode des surfaces de réponse, l'utilisateur a le choix de travailler dans l'espace physique ou dans l'espace normé. Se placer dans l'espace physique présente l'intérêt de traiter directement des solutions physiquement réalisables, alors que travailler directement dans l'espace normé garantit un choix de variables autour d'un point, distant d'un nombre d'écarts-types bien contrôlé, ce qui favorise le bon conditionnement du système à résoudre. Le passage de l'espace normé à l'espace physique se fait par transformation isoprobabiliste.

Le choix des points d'évaluation est crucial. Habituellement un plan d'expériences numériques définit les réalisations à calculer. Les différents plans d'expérience qui sont généralement utilisés sont :

- plan d'expériences en étoile de type $1, u, v, u^2, v^2, \cdots$ sans interaction entre les facteurs,

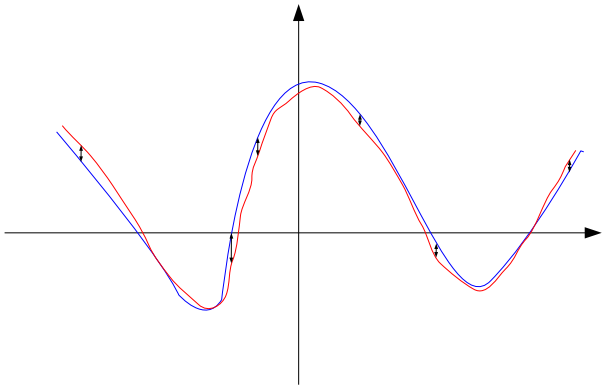


Fig. IV.4 – Principe de la méthode de surface de réponse

- plan d'expériences factoriel 2^n de type $1, u, v, uv, \cdots$,
- plan d'expériences composite étoile + factoriel de type $1, u, v, u^2, uv, v^2, \cdots$
- plan d'expériences tabulé de type Taguchi.

De tels plans ont été testés et ont conduit à des résultats satisfaisants sur des exemples de référence [ML96].

IV.3.3 Méthode de régression

Principe

La méthode de régression a été utilisée pour calculer les coefficients du développement dans le chaos polynomial par [Isu99,BSL04b]. L'approximation d'une composante S de la réponse du système s'écrit :

$$\tilde{S}(\theta) = \sum_{j=0}^{P-1} s_j \Psi_j(\{\xi_k(\theta)\}_{k=1}^M) \tag{4.17}$$

On se donne n réalisations de $\{\{\xi_k^{(q)}\}_{k=1}^M, q = 1, \cdots, n\}$ constituant un plan d'expériences. On en déduit les n réalisations du vecteur aléatoire des paramètres d'entrée $\{\underline{X}^{(1)}, \cdots, \underline{X}^{(n)}\}$ par transformation isoprobabiliste. Pour chaque réalisation, on évalue $S^{(i)} = S(\underline{X}^{(i)})$, où S est une fonction analytique (éventuellement, le code aux éléments finis déterministe). Par ailleurs, on calcule par (4.17) les réalisations $\tilde{S}^{(i)}$ en fonction des coefficients inconnus $\{s_j, j = 0, \cdots, P-1\}$. A l'aide de la méthode des moindres carrés, on minimise l'écart quadratique ΔS entre les variables aléatoires S et $\tilde{S}$ par rapport aux coefficients $\{s_j, j = 0, \cdots, P-1\}$:

$$\Delta S = \sum_{i=1}^{n} \left(S^{(i)} - \tilde{S}^{(i)} \right)^2 \tag{4.18}$$

Cela équivaut à minimiser par rapport aux coefficients $\{s_j, j = 0, \cdots, P-1\}$ l'expression :

$$\Delta S = \sum_{i=1}^{n} \left(S^{(i)} - \sum_{j=0}^{P-1} s_j \Psi_j(\{\xi_k^{(i)}\}_{k=1}^M) \right)^2 \tag{4.19}$$

Le minimum est obtenu pour des valeurs de s_j vérifiant :

$$\frac{\partial \Delta S}{\partial S_l} = 0 \quad \forall l \in \{0, \cdots, P-1\} \tag{4.20}$$

soit

$$\sum_{i=1}^{n} \Psi_l(\{\xi_k^{(i)}\}_{k=1}^M) \left(S^{(i)} - \sum_{j=0}^{P-1} s_j \Psi_j(\{\xi_k^{(i)}\}_{k=1}^M) \right) = 0 \quad \forall l \in \{0, \cdots, P-1\} \tag{4.21}$$

Finalement le système à résoudre est le suivant :

$$\sum_{j=0}^{P-1} s_j \left[\sum_{i=1}^{n} \Psi_l(\{\xi_k^{(i)}\}_{k=1}^M) \Psi_j(\{\xi_k^{(i)}\}_{k=1}^M) \right] = \sum_{i=1}^{n} S^{(i)} \Psi_l(\{\xi_k^{(i)}\}_{k=1}^M) \quad \forall l \in \{0, \cdots, P-1\} \tag{4.22}$$

Ce système peut également s'écrire :

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} \Psi_0(\{\xi_k^{(i)}\}_{k=1}^M)\Psi_0(\{\xi_k^{(i)}\}_{k=1}^M) & \cdots & \sum_{i=1}^{n} \Psi_0(\{\xi_k^{(i)}\}_{k=1}^M)\Psi_{P-1}(\{\xi_k^{(i)}\}_{k=1}^M) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} \Psi_{P-1}(\{\xi_k^{(i)}\}_{k=1}^M)\Psi_0(\{\xi_k^{(i)}\}_{k=1}^M) & \cdots & \sum_{i=1}^{n} \Psi_{P-1}(\{\xi_k^{(i)}\}_{k=1}^M)\Psi_{P-1}(\{\xi_k^{(i)}\}_{k=1}^M) \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} S_0 \\ \vdots \\ S_{P-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} S^{(i)} \Psi_0(\{\xi_k^{(i)}\}_{k=1}^M) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} S^{(i)} \Psi_{P-1}(\{\xi_k^{(i)}\}_{k=1}^M) \end{pmatrix} \tag{4.23}$$

L'utilisation de cette méthode permet de calculer le développement d'une composante S de la réponse aléatoire du système en résolvant le système (4.23) par une méthode de décomposition par valeurs singulières (Singular Value Decomposition ou SVD [PVTF01], cf. paragraphe suivant pour le détail de cette méthode). Si on veut connaître le développement d'une autre composante, il suffit d'évaluer les $S^{(i)} = S(\underline{X}^{(i)})$ pour la nouvelle composante. La résolution complète du nouveau système n'est pas nécessaire, la matrice du membre de gauche étant identique (elle ne dépend que des valeurs des n réalisations des points du plan d'expériences $\{\{\xi_k^{(q)}\}_{k=1}^M, q = 1, \cdots, n\}$). Seule la dernière étape de SVD est nécessaire.

Présentation de la méthode de résolution SVD

On a remarqué que lorsque la taille du plan d'expériences est trop petite, le système

est mal conditionné, ce qui signifie que lors de la résolution un pivot de faible valeur apparaît. Les valeurs des solutions peuvent alors être très grandes. La raison en est que les points du plan d'expériences ne sont pas totalement indépendants les uns des autres. Il est donc nécessaire d'utiliser des algorithmes adaptés pour la résolution du système (4.23). La méthode de décomposition par valeur singulière (Singular Value Decomposition ou SVD) [PVTF01] permet de résoudre de tels systèmes. La méthode SVD va donner dans le cas d'un système mal conditionné, les solutions ayant les valeurs les plus faibles. Nous la détaillons dans le cas d'un système de taille $P \times P$. Considérons le système à résoudre suivant :

$$\boldsymbol{A} \cdot \underline{x} = \underline{b} \tag{4.24}$$

Cette méthode est basée sur le théorème suivant : Toute matrice $\boldsymbol{A}$ de taille $P \times P$ peut s'écrire comme le produit d'une matrice orthogonale $\boldsymbol{U}$ de taille $P \times P$, d'une matrice diagonale $\boldsymbol{W}$ de taille $P \times P$ dont les éléments sont positifs ou nuls (les *valeurs singulières*) et de la transposée d'une matrice orthogonale $\boldsymbol{V}$ de taille $P \times P$. Ce qui s'écrit :

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{V}^T \tag{4.25}$$

Les matrices $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{V}$ sont orthonormales, ce qui s'écrit $\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{U}^T = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{V}^T = 1$. L'inverse de la matrice $\boldsymbol{W}$ est une matrice diagonale dont les éléments de la diagonale dont les inverses de ceux de la matrice $\boldsymbol{W}$. L'inverse de la matrice $\boldsymbol{A}$ s'écrit donc :

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{V} \cdot [\mathrm{diag}(1/w_j)] \cdot \boldsymbol{U}^T \tag{4.26}$$

Le seul cas qui peut poser problème est lorsque un ou plusieurs éléments de la diagonale de $\boldsymbol{W}$ est nul. Dans ce cas la matrice $\boldsymbol{A}$ est effectivement *singulière*.
On définit le *nombre de conditionnement* comme étant le ratio entre le plus grand et le plus petit (en valeur absolu) élément de la diagonale de $\boldsymbol{W}$. Une matrice est donc *singulière* lorsque ce nombre est infini, *mal conditionnée* si ce nombre est trop grand (approche la précision de la machine). La méthode SVD construit des bases pour les espaces engendrés par les valeurs singulières non nulles de $\boldsymbol{A}$ (au travers de la matrice $\boldsymbol{U}$) et par les valeurs singulières nulles de $\boldsymbol{A}$ (au travers de la matrice $\boldsymbol{V}$). Résolvons maintenant l'équation (4.24) dans le cas où la matrice $\boldsymbol{A}$ est singulière et que le vecteur $\underline{b}$ est non nul. Si le système a une solution $\underline{x}$ alors elle n'est pas unique, car on peut lui ajouter n'importe quelle combinaison linéaire de vecteurs engendrés par la matrice $\boldsymbol{V}$. Pour trouver cette solution $\underline{X}$, *on remplace* $1/w_j$ *par 0 si* $w_j = 0$ dans l'équation (4.26) et on a :

$$\underline{x} = \boldsymbol{V} \cdot [\mathrm{diag}(1/w_j)] \cdot (\boldsymbol{U}^T \cdot \underline{b}) \tag{4.27}$$

Choix du plan d'expériences

La principale difficulté dans cette méthode réside dans le choix des points du plan

d'expériences. Ces points peuvent être choisis aléatoirement ou à partir de racines de polynômes d'Hermite. Ces différentes méthodes sont détaillées dans les paragraphes qui suivent.

- Choix du plan d'expériences de manière aléatoire :
Le plan d'expériences peut également être choisi de manière aléatoire à l'aide d'une méthode de Monte Carlo par exemple. On peut également utiliser une méthode du Latin Hypercube pour choisir des points plus régulièrement répartis dans l'espace (*cf.* Annexe B).

- Choix du plan d'expériences à partir des racines de polynômes d'Hermite :
Dans [Isu99], les points de collocation sont construits à partir des m racines du polynôme d'Hermite d'ordre $m = p + 1$, où p est de degré maximal des polynômes du chaos. Le système étant de taille P, il faut choisir au minimum P points de collocation parmi les M-uplets contenant toutes les combinaisons possibles des m racines pour chaque variable $\{\xi_k(\theta)\}_{k=1}^{M}$. On remarque que c'est la même méthode que celle utilisée pour les choix des points de collocation de la section IV.3.1, le tableau IV.2 montre le nombre de combinaisons possible en fonction du nombre de variables aléatoires et de l'ordre du chaos polynomial. Pour en sélectionner une partie, [Isu99] choisit parmi les M-uplets de racines ayant une plus grande probabilité d'apparition (dans notre cas, les racines les plus proches de l'origine) *deux fois* plus de points que de coefficients à calculer. Si 0 ne fait pas partie des racines, on le rajoute au plan d'expériences.

Analyse paramétrique sur la taille du plan d'expériences
Nous avons effectué suivant cette méthode une analyse paramétrique sur le nombre de points de collocation. Nous avons également regardé l'influence de l'origine dans les racines du polynôme. Lorsque le nombre de points est proche de la taille du chaos, le système est mal conditionné et l'emploi de méthodes spécifiques de résolution (comme la méthode SVD présentée précédemment) est nécessaire. Ce problème disparaît lorsque le nombre de points dans le plan d'expériences augmente. Ces analyses paramétriques sont présentées dans le chapitre suivant sur les validations et applications des méthodes développées dans ce travail. Le choix des points de collocation de manière aléatoire est à proscrire car il nécessite un nombre plus important de points dans le plan d'expériences pour obtenir de bon résultats. Comme les analyses de fiabilité s'intéressent aux queues de distribution, il est intéressant d'avoir des points du plan d'expériences dans ces zones pour les variables aléatoires d'entrée. Ceci est plus facilement contrôlable avec le choix des racines parmi les racines du polynôme d'Hermite. Pour un ordre du chaos polynomial de 3, on calcule les racines du polynôme d'Hermite d'ordre 4, la racine ayant la plus grande valeur absolue est $-\sqrt{3+\sqrt{6}}$, ce qui permet de se situer à un peu plus de 2 écarts-types d'une v.a.g.c.r.

Comparaison avec la méthode des surfaces de réponse

La seule différence qu'il y a entre la méthode de régression présentée au paragraphe IV.3.3 et la méthode des surfaces de réponse est la base de développement (à condition d'utliser la méthode de surfaces de réponse dans l'espace normé). En prenant les mêmes points d'évaluation des variables d'entrée et en effectuant un changement de base (du chaos polynomial vers celle de développement de la surface de réponse), on obtient les mêmes coefficients pour le développement de la réponse. Contrairement à la méthode de surface de réponse, la méthode de régression propose un choix précis pour les points d'évaluation des variables d'entrée. Par ailleurs, elle permet une génération cohérente à différents degrés p. C'est donc une généralisation de la méthode classique des surfaces de réponse quadratiques. Ces méthodes permettent de minimiser, au sens des moindres carrés, l'écart entre des points expérimentaux et des valeurs approchées par un polynôme, alors que la méthode de collocation impose l'égalité entre ces points.

IV.3.4 Conclusions

Les méthodes de régression permettent bien de calculer les coefficients du développement de la réponse d'un système sur le chaos polynomial à partir d'un nombre fini de calculs aux éléments finis déterministes et d'un post-traitement judicieux. La méthode de collocation est à proscrire car elle n'est pas assez précise et on ne peut pas intervenir sur le nombre de points de collocation. Les méthodes de surfaces de réponse "classiques" et de régression sont équivalentes à condition de prendre le même ordre pour le polynôme de sortie. Cependant en choisissant le développement sur la base du chaos polynomial, nous disposons d'une méthode de choix pour les points du plan d'expériences. Cette méthode est donc préférée.

IV.4 Equivalence entre les deux approches [Sud05]

[Sud05] a montré l'équivalence entre les méthodes non intrusives de projection, en utilisant un schéma de quadratures, et de régression. On peut minimiser l'écart dans (4.19) par la moyenne empirique sur N réalisations du vecteur aléatoire d'entrée $\{\underline{X}^{(1)}, \cdots, \underline{X}^{(N)}\}$. A partir de ces réalisations et de la transformation isoprobabiliste, on a les réalisations d'une variable multinormale $\{\underline{\xi}^{(1)}, \cdots, \underline{\xi}^{(N)}\}$. Les coefficients vérifient donc :

$$\Delta S = \text{Argmin} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(S(\underline{X}^{(i)}) - \sum_{j=0}^{P-1} s_j \Psi_j(\underline{\xi}^{(1)}) \right)^2 \tag{4.28}$$

Pour obtenir de bons résultats, il faudrait tirer aléatoirement $N >> P$ points de calcul (formant un plan d'expériences).

On peut également essayer de calculer précisément (4.28) avec un nombre de points dans le plan de d'expérience judicieusement choisis. La question du plan d'expériences optimal se pose alors. Pour ce faire, il suffit de rappeler que l'expression à minimiser dans (4.19) est une intégrale, que l'on peut évaluer par un schéma de quadratures :

$$\Delta S = \text{Argmin} \int_{\mathbb{R}^M} \left[S(\underline{X}^{(i)}) - \sum_{j=0}^{P-1} s_j \Psi_j(\underline{\xi}^{(1)}) \right]^2 \varphi_M(\underline{\xi}) d\underline{\xi} \tag{4.29}$$

En approximant l'intégrale précédente par un schéma de quadratures, on obtient les coefficients s_j comme solution d'un problème quadratique de forme équivalente à (4.28). La différence ici est que les points du plan d'expériences sont ceux du schéma de quadratures, et que les sommes sont pondérées par les poids d'intégration (au lieu d'être équi-pondérées).
La méthode de régression avec la minimisation au sens des moindres carrés a été obtenue de façon heuristique comme un hybride entre les deux approches présentées ci-dessus : le plan d'expériences est construit à partir des points d'intégration d'un schéma de quadratures. Par contre, on ne retient qu'un certain nombre $N << K^M$ points dans le plan d'expériences. Ceux-ci ont été sélectionnés parmi les K^M M-uplets possibles comme étant les plus proches de l'origine de l'espace gaussien. Par ailleurs, la pondération a été ignorée : en pratique, ce choix est licite car les poids $w_{i_1}, \cdots, w_{i_M}$ associés aux N M-uplets les plus proches de l'origine sont quasiment constants.

IV.5 Utilisation des méthodes non intrusives

Dans cette section, nous présentons la manière dont sont utilisées pratiquement les méthodes *non intrusives* de projection et de régression (dans ce cas seulement la méthode de minimisation au sens des moindres carrés).

IV.5.1 Méthode de projection

Nous avons vu que la méthode de projection permet de ramener le calcul des coefficients du développement de la réponse à celui d'une intégrale. Après avoir défini le modèle déterministe et les M variables aléatoires intervenant dans le problème et choisi l'ordre p du chaos polynomial, il faut construire ce dernier à l'aide de la méthode présentée en annexe A. Une fois la génération du chaos terminée, il faut évaluer l'intégrale 4.3 par une des méthodes suivantes :

- la méthode de simulation : c'est la méthode la plus facile à mettre en œuvre mais la plus coûteuse. Il faut tout d'abord générer un échantillon de taille N_{sim} pour les variables aléatoires. A partir de cet échantillon, il faut évaluer S pour

les différents tirages (N_{sim} calculs éléments finis ou évaluation de par tout autre code). Cette étape peut être parallélisée, en effet, on connaît par avance, tous les calculs qui vont être faits. On peut moyenner les N_{sim} résultats de S.

- la méthode de quadratures : une fois l'ordre K d'intégration choisi, il faut calculer les poids $\{w_1, \cdots, w_K\}$ et points d'intégration $\{\xi_1, \cdots, \xi_K\}$. Il faut ensuite générer les K^M combinaisons possibles pour les poids et points d'intégration en fonction du nombre M de v.a.g.c.r. du problème. A partir de ces combinaisons, on peut calculer les différents produits des poids d'intégration $w_{k_1} \cdots w_{k_M}$. En utilisant la transformation isoprobabiliste $\xi \rightarrow X$, on évalue les valeurs des paramètres d'entrée pour les calculs éléments finis. Ces calculs peuvent enfin être lancés (encore une fois, il y a possibilité de paralléliser ces calculs). L'intégrale (4.3) peut enfin être approximée par l'évaluation de l'expression (4.8)

Une fois l'intégrale (4.3) calculée, on peut facilement calculer les coefficients par le ratio (4.2). La figure IV.5 résume la méthodologie à mettre en œuvre pour applique la méthode non intrusive de projection.

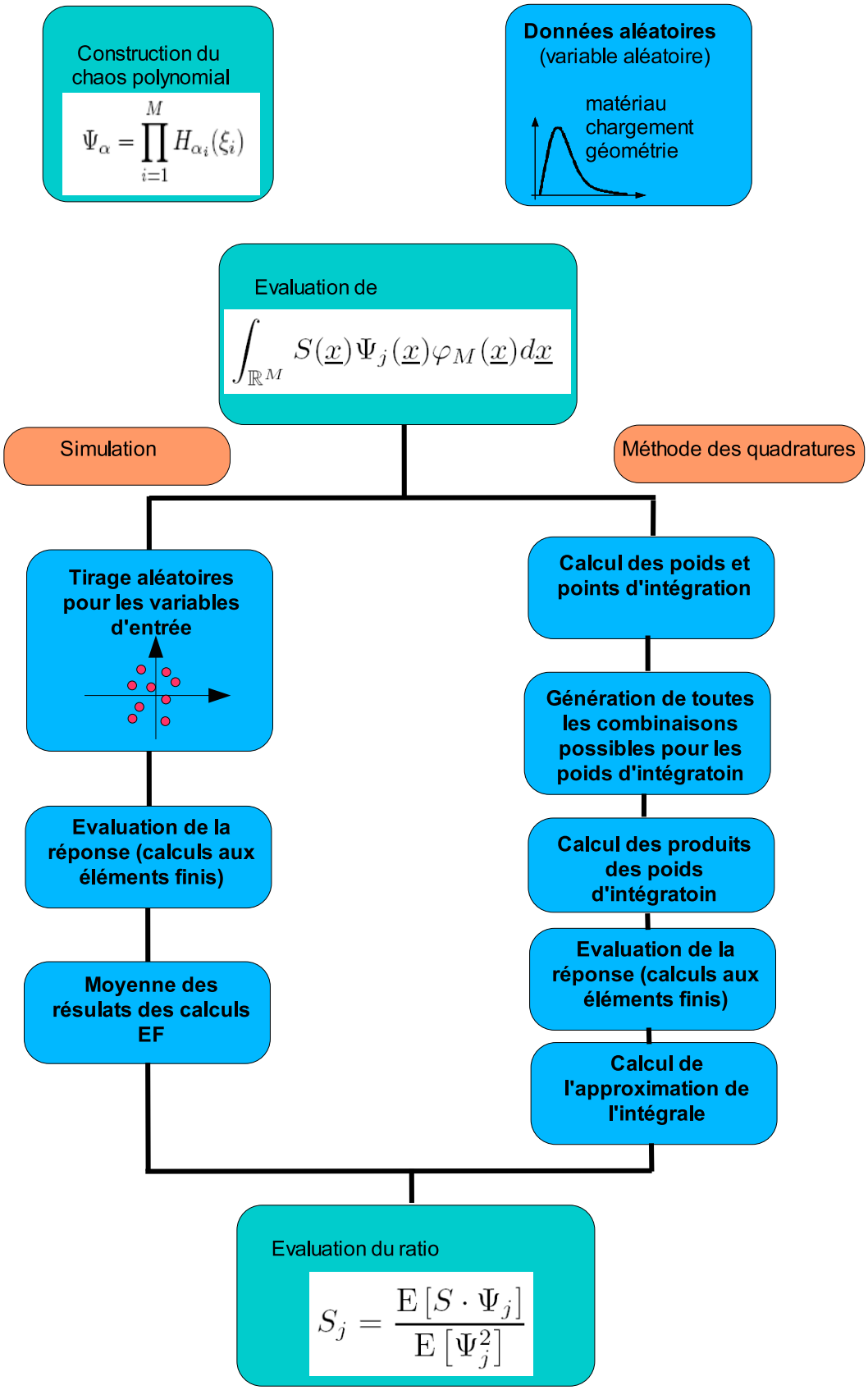


Fig. IV.5 – Mise en œuvre de la méthode non intrusive de projection

IV.5.2 Méthode de régression

Pour la méthode de régression, il y a des étapes qui sont communes à la méthode de projection. En effet, toutes les étapes de préparation (choix du modèle déterministe, des variables aléatoires, génération du chaos polynomial) sont indépendantes de la méthode non intrusive choisie. Dans la méthode de régression, on veut minimiser l'écart quadratique entre la solution exacte (obtenue par évaluation de la réponse (calcul aux éléments finis ou autre)) avec la solution approchée par le chaos polynomial et ce pour un ensemble de points d'un plan d'expériences. On se place donc dans l'espace des variables gaussiennes et on génère le plan d'expériences. Pour ce faire, on calcule les $p+1$ racines du polynôme d'Hermite unidimensionnel d'ordre p+1. On génère tous les M-uplets contenant toutes les combinaisons possibles de p+1 racines pour chaque variable $\{\xi_k\}_{k=1}^{M}$. Comme il y a trop de combinaisons, on fait une sélection en classant les uplets par norme croissante. On peut alors choisir la taille du plan d'expériences. En utilisant la transformation isoprobabiliste $\xi \rightarrow X$, on peut calculer les valeurs des paramètres d'entrée pour les calculs de la réponse et lancer ces calculs (par un code aux éléments finis ou autre). On peut noter, comme pour la méthode non intrusive de projection, que l'on connaît par avance les calculs à effectuer et on peut donc paralléliser cette opération. Une fois cette opération finie, on peut construire la matrice du membre de gauche et le vecteur du membre de droite du système (4.23). Ce système est alors résolu avec l'algorithme SVD.
En utilisant cette méthode, il est facile d'augmenter la précision en prenant plus de points dans le plan d'expériences, sans perdre le bénéfice des précédents calculs. Il est alors possible de définir un estimateur d'erreur pour la composante S de la réponse. Supposons que nous ayons $n = kP$ points dans le plan d'expériences, où $k = 1, 2, \cdots$ et que l'on cherche k pour une précision donnée. Pour chaque $k \geq 1$, un estimateur d'erreur pour la composante S de la réponse (supposée non nulle) est calculé avec un taux de convergence ε_k :

$$\varepsilon_k = \left| \frac{S_{k+1} - S_k}{S_k} \right| \tag{4.30}$$

Si ce taux de convergence est inférieur à une tolérance, disons 1%, la méthode de régression est considérée précise. Si le taux de convergence est supérieur à la tolérance, on ajoute P nouveaux points dans le plan d'expériences (on refait donc P calculs aux éléments finis supplémentaires). La procédure est renouvellée jusqu'à atteindre la tolérance fixée.
La figure IV.6 résume la méthodologie à mettre en œuvre pour appliquer la méthode non intrusive de régression.

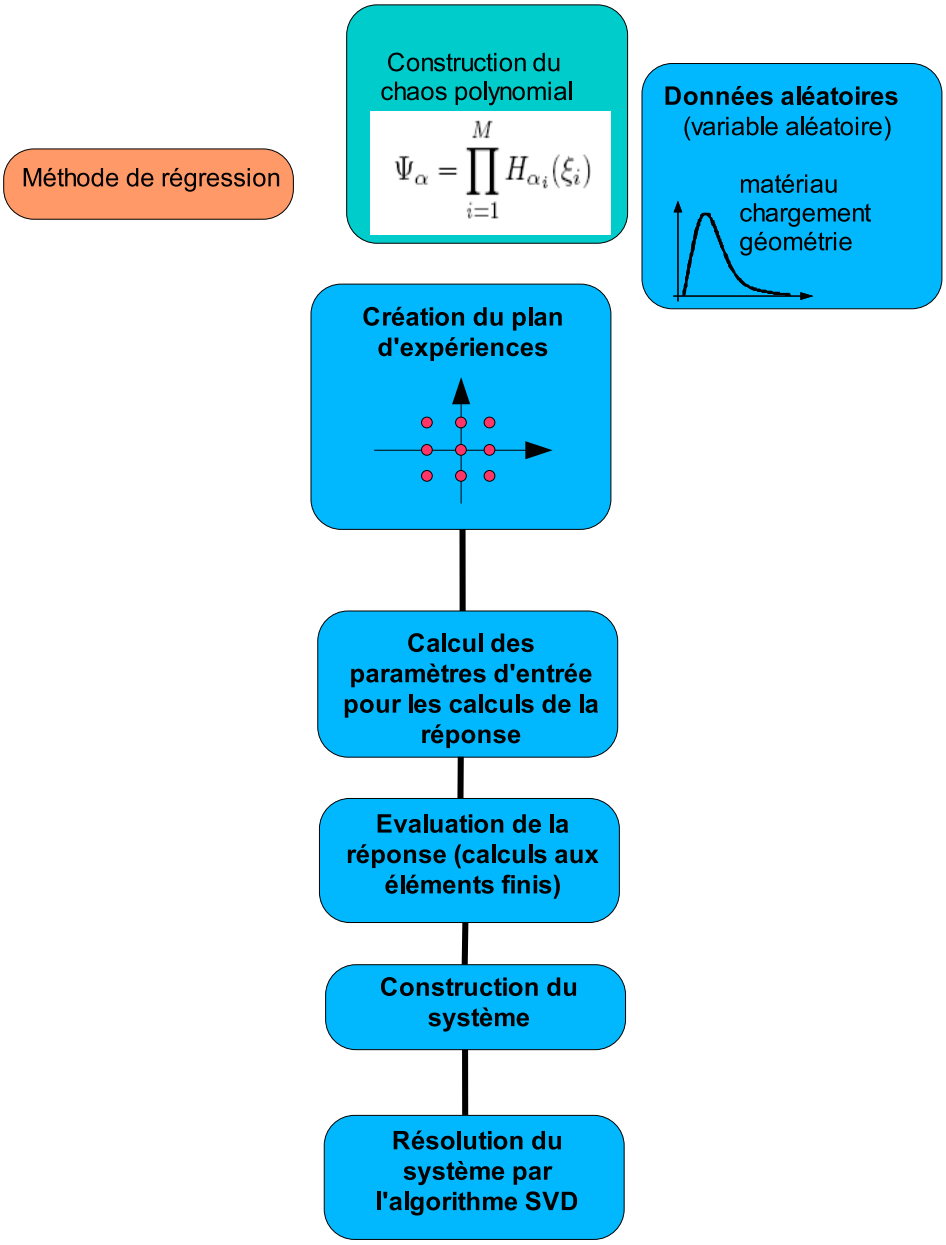


Fig. IV.6 – Mise en œuvre de la méthode non intrusive de régression

IV.5.3 Conclusions

On voit que les coefficients s_j peuvent être calculés uniquement à partir de calculs aux éléments finis déterministes et d'un post-traitement adéquat. On note également que ces méthodes peuvent être utilisées sur des fonctions analytiques à la place de calculs aux éléments finis déterministes. Comme on connaît à l'avance les données

des paramètres d'entrée des différents calculs à lancer, on peut paralléliser cette opération pour augmenter l'efficacité des méthodes.

IV.6 Conclusions

Dans cette section, nous avons présenté des méthodes, dites *non intrusives*, qui permettent de développer toute composante de la réponse d'un système dont les entrées sont aléatoires. Pour ce faire, elles utilisent des calculs aux éléments finis déterministes et un post-traitement adéquat des résultats. De ce fait, on peut utiliser toute la puissance de calcul du code pour appliquer ces méthodes sur des problèmes non linéaires. L'aléa peut également porter sur la géométrie du problème. Il faut seulement regénérer le maillage avant chaque calcul aux éléments finis. Ces méthodes peuvent être décomposée en deux familles : la méthode de projection qui utilise l'orthogonalité de la base et les méthodes de régression qui nécessitent la formation d'un plan d'expériences. Le point délicat de la méthode de projection est l'évaluation d'une intégrale, qui peut s'effectuer par simulation ou par un schéma de quadratures. [Kee04] propose d'utiliser un schéma de quadratures optimisé baptisé "*cubatures*" [Smo63], qui permet d'évaluer une intégrale en n'utilisant qu'un nombre réduit de points d'intégration. Ce type de schéma d'intégration n'a pas pu être abordé dans le cadre de ce travail.
Il existe deux méthodes de régression : la méthode de collocation qui est à proscrire car peu précise et la méthode de minimisation au sens des moindres carrés qui minimise l'écart entre la solution exacte (obtenue par des calculs aux éléments finis) et la solution approchée (obtenue par évaluation de l'approximation dans le chaos polynomial) pour différents points d'un plan d'expériences. Pour sa mise en œuvre nous avons proposé une méthode de sélection des points formant le plan d'expériences. Dans les méthodes classiques de surface de réponse, la base utilisée est une base polynomiale d'ordre 2 de l'espace standard. Mais il n'existe que des indications pour les plan d'expériences utilisés. Si on utilise dans la méthode de régression, un chaos du deuxième ordre et le même plan d'expériences que celui utilisé dans la méthode de surface réponse, alors nous obtenons les mêmes coefficients. Ces méthodes sont donc équivalentes, la différence notable est le choix des points proposés en fonction des racines des polynômes d'Hermite dans la méthode de régression

La figure IV.7 présente un schéma récapitulatif pour l'utilisation des méthodes non intrusives.

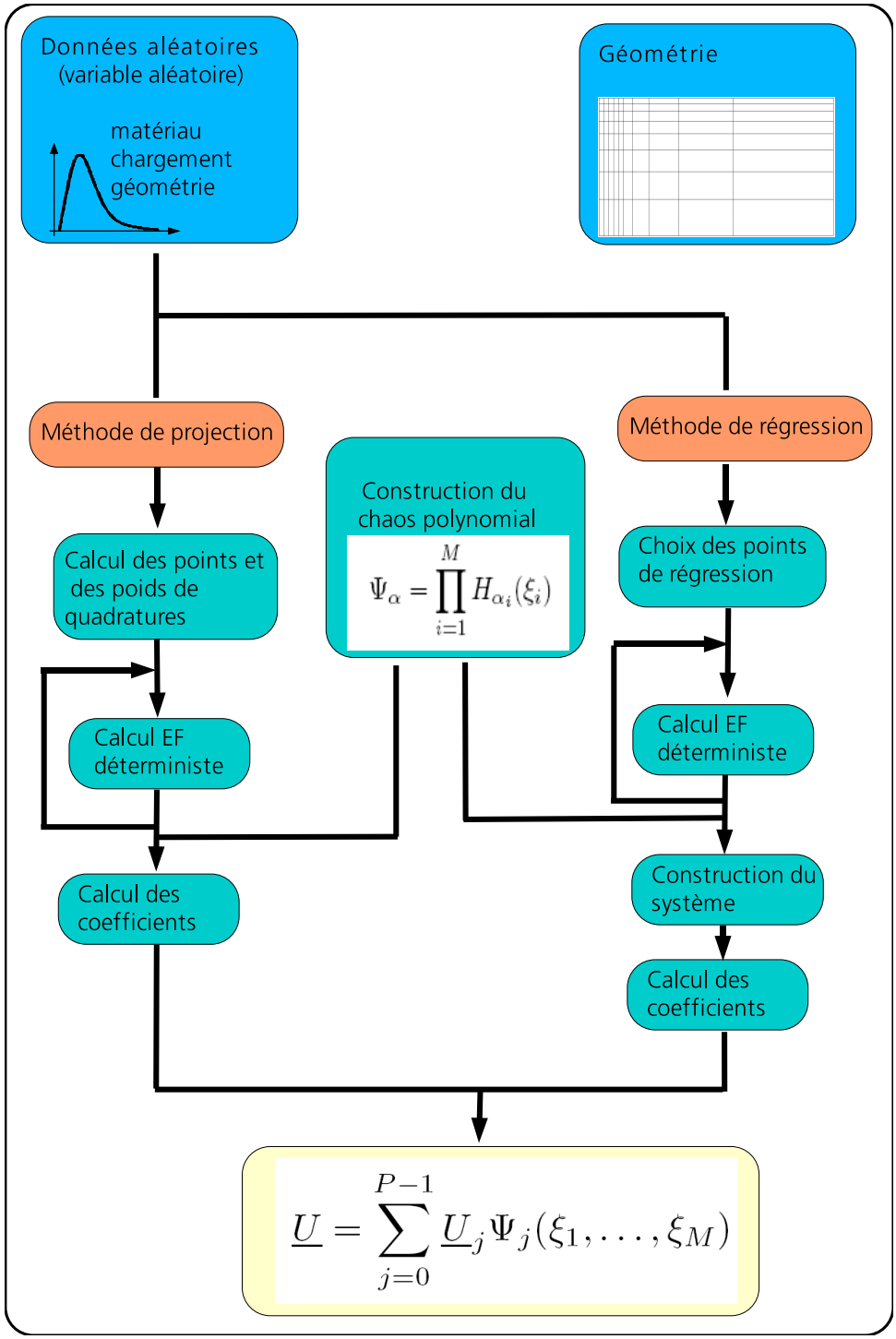


Fig. IV.7 – Schéma bilan du chapitre 4 sur les méthodes non intrusives

Chapitre -V-

Validation et applications

Sommaire

V.1 Introduction 95

V.2 Cas tests analytiques pour la fiabilité 95

V.2.1 Introduction 95

V.2.2 Cas test numéro 1 97

V.2.3 Cas test numéro 2 98

V.2.4 Cas tests 3-4-5 100

V.2.5 Cas test numéro 6 105

V.2.6 Cas test numéro 7 106

V.2.7 Conclusion 107

V.3 Tassement d'une fondation 107

V.3.1 Position du problème 107

V.3.2 Calcul des moments de la réponse 109

V.3.3 Analyse de fiabilité 109

V.3.4 Performances 112

V.3.5 Conclusion 114

V.4 Convergence d'un tunnel 115

V.4.1 Position du problème 115

V.4.2 Introduction des aléas dans le modèle 115

V.4.3 Calcul des moments de la réponse 117

V.4.4 Analyse fiabiliste 118

V.4.5 Résultats complémentaires 119

V.4.6 Conclusion 121

V.5 Tuyau fissuré 123

V.5.1 Présentation de l'étude 123

V.5.2 Définition des variables aléatoires 123

V.5.3 Calcul des moments statistiques de la réponse 126
V.5.4 Analyse de fiabilité 127
V.5.5 Conclusion 128
V.6 Conclusion 131

V.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons utiliser les méthodes des chapitres III et IV sur différents exemples d'application. Dans un premier temps, les méthodes non intrusives sont testées sur des cas analytiques de fiabilité des structures. Ensuite nous allons comparer ces méthodes non intrusives à la méthode MEFS présentée au chapitre III (dite *intrusive*) sur deux exemples de mécanique élastique linéaire. Enfin, les méthodes non intrusives sont comparées sur un problème de mécanique non linéaire de la rupture.

V.2 Cas tests analytiques pour la fiabilité

V.2.1 Introduction

Dans cette section, nous allons utiliser les méthodes *non intrusives* sur des cas analytiques proposés par [Waa00] dans le cadre d'analyses de fiabilité. Ces cas (Tableau V.1) permettent de calculer des probabilités de défaillance associées à des états limites vérifiant certains critères pénalisants (Tableau V.2). Les résultats de référence (analytiques et utilisant des méthodes standard (FORM, SORM, simulation) pour calculer l'indice de fiabilité relatif à chaque fonction d'état limite) sont donnés dans [Waa00]. On utilise ici les méthodes non intrusives de projection (quadrature) et de régression pour déterminer les coefficients du développement à l'ordre 3 sur le chaos polynomial. Ces cas sont analytiques et ne permettent pas de juger de la pertinence des résultats du point de vue du temps de calcul. Cependant, les méthodes *non intrusives* nous fournissent une expression analytique polynomiale de la fonction d'état limite dans l'espace normé à partir d'un nombre fini d'appels à la fonction d'état limite. A partir de cette expression, toutes les méthodes habituelles de fiabilité (notamment, les méthodes de simulation, tirages d'importance) se font sur une expression analytique et sont donc très peu coûteuses en terme de temps de calcul. Dans un contexte général de simulation en mécanique, ces appels à la fonction d'état limite sont très souvent des calculs aux éléments finis, qui sont très coûteux en terme de temps de calcul, les analyses fiabilistes (tirages d'importance, simulation ou autres) sont quasiment instantanées en comparaison à ces calculs éléments finis.

Tab. V.1 – Définition des cas tests analytiques [Waa00]

Num.	Etat-limite	Critère testé
1	$g = x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 - 5x_5 - 5x_6 + 0.001 \sum_{i=1}^{6} sin(100x_i)$	2
2	$g = R - S^2$	4
3	$g = 2,5 + 0,1(u_1 - u_2)^2 - \frac{(u_1 + u_2)}{\sqrt{2}}$	7
4	$g = 3 - u_1 u_2$	3,6,7
5	$g = 3 - 0,5(u_1 - u_2)^2 - \frac{(u_1 + u_2)}{\sqrt{2}}$	2,3,4,6
6	$g = min \begin{cases} 3,0 + 0,1(u_1 - u_2)^2 - \frac{(u_1+u_2)}{\sqrt{2}} \\ 3,0 + 0,1(u_1 - u_2)^2 + \frac{(u_1+u_2)}{\sqrt{2}} \\ (u_1 - u_2) + 3.5\sqrt{2} \\ (u_2 - u_1) + 3.5\sqrt{2} \end{cases}$	1,3
7	$g = max \begin{cases} 2,677 - u_1 - u_2 \\ 2,500 - u_2 - u_3 \\ 2,323 - u_3 - u_4 \\ 2,250 - u_4 - u_5 \end{cases}$	1,3

Tab. V.2 – Définition des critères

Num.	Critère
1	Points de conception multiple
2	Surface d'état limite bruitée
3	Unions et intersections
4	Dimension de l'espace
5	Niveau de probabilité
6	Courbures importantes
7	Pas de racines dans les directions des axes

V.2.2 Cas test numéro 1

Dans le cas test analytique 1, la fonction d'état limite g_1 est défini par (5.1) et dépend des variables définies dans le tableau V.3. On utilise un chaos polynomial d'ordre 3, et comme il y a 6 variables aléatoires, la taille du chaos est $P = \frac{(6+3)!}{6!3!} = 84$.

$$g_1(x_1, \cdots, x_6) = x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 - 5x_5 - 5x_6 + 0,001 \sum_{i=1}^{6} sin(100x_i) \quad (5.1)$$

Tab. V.3 – Cas test 1 : Définition des variables aléatoires

Variable aléatoire	Loi	moyenne	écart-type
x_1	Lognormale	120	12
x_2	Lognormale	120	12
x_3	Lognormale	120	12
x_4	Lognormale	120	12
x_5	Lognormale	50	15
x_6	Lognormale	40	12

Pour résoudre le problème de fiabilité, nous avons utilisé différentes méthodes de fiabilité (FORM, simulation de Monte Carlo et le tirage d'importance (méthode FORM, puis simulation de Monte Carlo autour du point de conception)) sur la fonction d'état limite (5.1). Nous avons obtenu pour chacune de ces méthodes une valeur pour l'indice de fiabilité. Ces valeurs serviront de référence pour tester les méthodes non intrusives. On remarque que l'approximation FORM ne permet pas de retrouver la valeur de l'indice de fiabilité obtenu par simulation de Monte Carlo, alors que le tirage d'importance (avec 10000 tirages) permet de retrouver l'indice de fiabilité obtenu par Monte Carlo. La méthode FORM nous a également fourni les coordonnées du point de conception P^*. Tous ces résultats sont rassemblés dans les tableau V.4 et V.5.

Tab. V.4 – Cas test 1 : Indice de fiabilité associé à la fonction d'état limite 5.1 obtenus avec les méthodes classiques de fiabilité

	Indice de fiabilité	Nombre de tirages pour la simulation	Coefficient de variation de la simulation
β_{MC}	2,25	1000000	0,9%
β_{FORM}	2,35	-	-
β_{TI}	2,25	10000	1,9%

Tab. V.5 – Cas test 1 : Coordonnées du point de conception obtenues par la méthode FORM

Variable aléatoire	Etat-limite g_1	Etat-limite $\tilde{g}_1$
x_1	117,27	117,27
x_2	115,24	115,24
x_3	115,24	115,24
x_4	117,27	117,27
x_5	83,61	83,31
x_6	55,49	55,67

A l'aide des méthodes non intrusives de projection (avec un schéma de quadratures pour l'intégration) et de régression, nous avons calculé les coefficients du développement, noté $\tilde{g}_1$, de g_1 sur un chaos polynomial d'ordre 3. A partir de ces développements, nous avons utilisé la technique du tirage d'importance (avec 10000 tirages, le coefficient de variation de chaque simulation est précisé dans le tableau V.6) pour obtenir les indices de fiabilité associés à $\tilde{g}_1$. Comme nous appliquons les méthodes de fiabilité sur une fonction analytique, la méthode de tirage d'importance se fait à moindre coût. On remarque que pour la méthode de projection, il faut prendre au moins 4 points d'intégration (soit 4096 appels à l'état limite pour calculer les coefficients) pour obtenir une bonne valeur de l'indice de fiabilité. Sans la méthode de régression, il faut au moins avoir 420 points (soit $(M-1)P = 5 \cdot 84$) dans le plan d'expériences pour retrouver l'indice de fiabilité de référence.
Les coordonnées du point de défaillance sont obtenus par FORM appliqué sur $\tilde{g}_1$ (cf. Tableau V.5 pour la valeur obtenue par FORM sur les coefficients obtenus par la méthode de régression avec 420 points dans le plan d'expériences). On retrouve bien les mêmes coordonnées que celles obtenues par FORM appliqué à g_1. Les méthodes *non intrusives* permettent donc de bien approximer un état limite avec 6 variables aléatoires, cet état limite étant quasi-linéaire, mais ayant des perturbations (présence des sinus).

V.2.3 Cas test numéro 2

La fonction d'état limite du cas test 2 est définie par l'équation (5.2), elle fait intervenir deux variables gaussiennes (tableau V.7). L'allure de l'état limite est donnée par la figure V.1. On utilise un chaos polynomial d'ordre 3, et comme il y a 2 variables aléatoires, la taille du chaos est 10.

$$g_2(R, S) = R - S^2 \tag{5.2}$$

Tab. V.6 – Cas test 1 : Indice de fiabilité associé à la fonction d'état limite $\tilde{g}_1$ (obtenu par les méthodes non intrusives) obtenu avec la méthode du tirage d'importances

Méthode de régression									
Taille du plan d'expériences	84	168	252	336	420	504	588	672	4096
Indice de fiabilité	0,91	1,20	1,36	1,61	2,23	2,24	2,26	2,25	2,24
Coeff. de var. de la simulation	0,10	0,12	0,12	0,30	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02

Méthode de projection						
Nombre de points d'intégration	2	3	4	5	6	7
Nombre d'appels à l'état limite	64	729	4096	15625	46656	117649
Indice de fiabilité	2,40	2,30	2,26	2,25	2,25	2,24
Coeff. de var. de la simulation	0,06	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02

Tab. V.7 – Cas test 2 : Définition des variables aléatoires

Variable aléatoire	Loi	moyenne	écart-type
R	Normale	11,0	1,0
S	Normale	1,5	0,5

La variable aléatoire associée à la fonction d'état limite g_2 n'est pas de type connu. Nous ne connaissons donc pas les coefficients théoriques du développement de g_2 sur la base du chaos polynomial. Nous allons donc comparer directement les indices de fiabilité associés à la fonction d'état limite g_2. Le tableau V.8 rassemble les indices de fiabilité de référence (obtenus analytiquement ainsi qu'avec la méthode FORM), et ceux calculés à partir des méthodes *non intrusives* de projection et de régression et en utilisant la méthode FORM et un tirage d'importance (avec un coefficient de variation de 5% pour la simulation, soit environ 1000 tirages). On remarque que pour le schéma de quadratures de la méthode de projection, il faut au moins 3 points d'intégration pour obtenir un indice de fiabilité satisfaisant (erreur relative inférieure à 1%). En utilisant 2 points d'intégration, l'erreur relative est d'environ 4,97%. Pour la méthode de régression, dès qu'on a 10 points dans le plan d'expériences, on a une erreur relative inférieure à 1% pour l'indice de fiabilité.

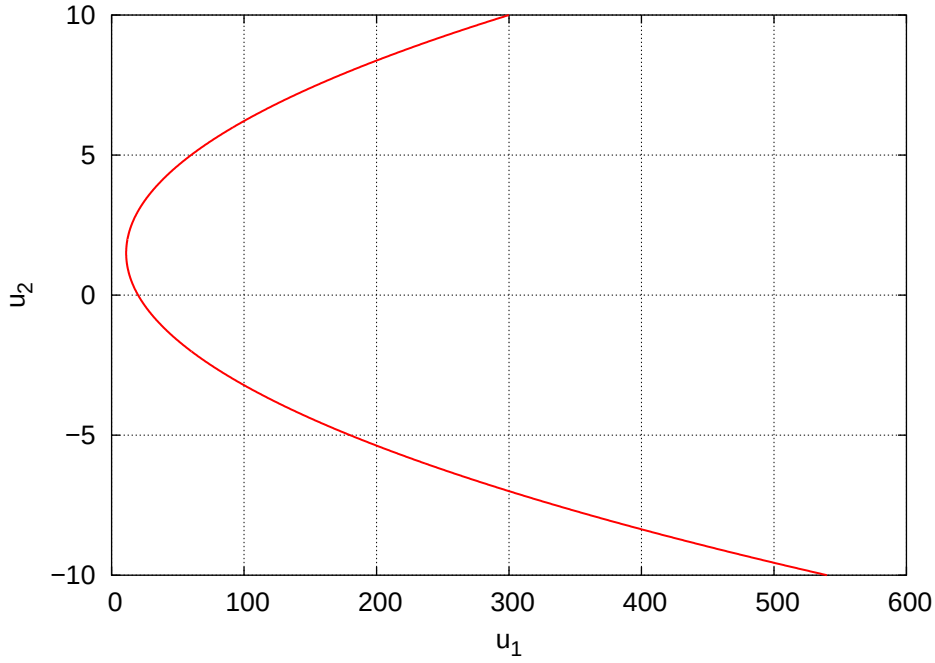


Fig. V.1 – Cas test 2 : état limite

Tab. V.8 – Cas test 2 : Indice de fiabilité associé à la fonction d'état limite 5.2

Théorique	FORM	Projection 4 points (=16 calculs)	Régression 16 points
3,4700	3,4700	3,4661	3,4591

V.2.4 Cas tests 3-4-5

Dans cette section, nous regroupons tous les cas tests (3, 4 et 5) dont les fonctions d'état limite sont polynomiales (Tableau V.1). Ces états limites ont des allures particulières (concave, convexe, non connexe), ce qui nous permet de vérifier l'efficacité des méthodes non intrusives dans de tels cas et ce à moindre coût (les fonctions d'état limite étant analytiques). Ces exemples vont nous permettre de comparer les valeurs des coefficients du développement de la réponse obtenus avec les méthodes non intrusives avec les coefficients théoriques issues des fonctions d'état limite. Si les coefficients obtenus sont identiques à ceux de référence alors les méthodes de fiabilité (Monte Carlo, FORM/SORM) appliquées à la fonction d'état limite fournissent les mêmes résultats. Ces exemples permettent, sur des cas simples, de vérifier que les méthodes non intrusives sont capables de résoudre des problèmes de fiabilité dont la surface d'état limite est particulière.

a) Cas test 3

Dans le cas analytique 3, la fonction d'état limite g_3 est définie par (5.3) et dépend des variables u_1 et u_2 qui sont définies dans le tableau V.9. Cet état limite définit un domaine de défaillance convexe (Figure V.2). On utilise un chaos polynomial d'ordre 3, et comme il y a 2 variables aléatoires, la taille du chaos est $P = 10$.

$$g_3(u_1, u_2) = 2,5 + 0,1(u_1 - u_2)^2 - \frac{(u_1 + u_2)}{\sqrt{2}} \tag{5.3}$$

Tab. V.9 – Cas test 3 : Définition des variables aléatoires

Variable aléatoire	Loi	moyenne	écart-type
u_1	Normale	0,0	1,0
u_2	Normale	0,0	1,0

Fig. V.2 – Cas test 3 : état limite

b) Cas test numéro 4

Dans le cas test analytique 4, la fonction d'état limite g_4 est définie par (5.4) et dépend des variables u_1 et u_2

de régression, on obtient de bonnes valeurs de coefficients des 10 points. En prenant plus de points dans le plan d'expériences, la précision n'augmente pas. Les méthodes non intrusives de projection et de régression permettent de retrouver les coefficients d'un état limite polynomial. On pourra donc utiliser ces méthodes dans le cadre d'analyses de fiabilité dont les surfaces d'état limite ont les mêmes particularités que celles des états limites 3, 4 et 5.

V.2.5 Cas test numéro 6

Dans le cas analytique 6, la fonction d'état limite g_6 est définie par (5.6) et dépend des variables u_1 et u_2 qui sont définies dans le tableau V.15. On utilise un chaos polynomial d'ordre 3, et comme il y a 2 variables aléatoires, la taille du chaos est $P = 10$. Cet exemple permet de tester les méthodes *non intrusives* dans le cas d'un système série à 4 branches.

$$g_6(u_1,u_2) = \min \begin{cases} 3,0 + 0,1(u_1-u_2)^2 - \frac{(u_1+u_2)}{\sqrt{2}} \\ 3,0 + 0,1(u_1-u_2)^2 + \frac{(u_1+u_2)}{\sqrt{2}} \\ (u_1-u_2) + 3,5\sqrt{2} \\ (u_2-u_1) + 3,5\sqrt{2} \end{cases} \tag{5.6}$$

Tab. V.15 – Cas test 6 : Définition des variables aléatoires

Variable aléatoire	Loi	moyenne	écart-type
u_1	Normale	0,0	1,0
u_2	Normale	0,0	1,0

Le tableau V.16 rassemble les indices de fiabilité généralisés de référence (exact, calculé par FORM, SORM (avec la formule de Breitung)) et Monte Carlo (avec 100000 tirages)) et ceux calculés par les méthodes *non intrusives* (projection et régression) calculés par FORM et avec un tirage d'importance (coefficient de variation de la simulation d'environ 5%) à partir du développement de g sur la base du chaos. On remarque que la seule méthode de référence qui permet de calculer correctement l'indice de fiabilité est la méthode de Monte Carlo, les méthodes FORM et SORM donnent des résultats sensiblement différents de la solution exacte (au moins 5% d'erreur) avec des nombres élevés d'appels à la fonction d'état limite : 32 pour FORM et 44 pour SORM). Pour la méthode *non intrusive* de projection utilisant un schéma de quadratures, il faut au moins 3 points d'intégration pour que le résultat converge. A partir de 3 points (donc 9 appels à l'état limite), les résultats restent constants et on a une erreur relative d'environ 10% sur l'indice de fiabilité. Pour la méthode de régression, l'erreur relative est toujours inférieure à 6% à partir de 11 points dans le plan d'expériences. A partir de 13 points (donc 13

appels à l'état limite), l'erreur relative ne dépasse pas 2,5%. De plus, ces méthodes nécessitent moins d'appels à l'état limite que les méthodes FORM et SORM.
Cet exemple permet de montrer que les méthodes non intrusives sont efficaces lorsque l'état limite est défini comme étant le minimum de plusieurs fonctions. La surface d'état limite est alors définie comme une combinaison des différentes fonctions intervenant dans la fonction d'état limite.

Tab. V.16 – Cas test 6 : Indice de fiabilité associé à la fonction d'état limite 5.6

Exact	FORM	SORM	Monte Carlo 100000	Projection 4 pts (=16 calculs)	Régression 16 points
2,85	3,00	3,13	2,85	2,53	2,88

V.2.6 Cas test numéro 7

Dans le cas analytique 7, la fonction d'état limite g_7 est définie par (5.7) et dépend des variables définies dans le tableau V.17. On utilise un chaos polynomial d'ordre 3, et comme il y a 5 variables aléatoires, la taille du chaos est $P = 56$. Cet exemple permet de tester les méthodes *non intrusives* dans le cas d'un système parallèle à 4 branches.

$$g_7(u_1, \cdots, u_5) = \max \begin{cases} 2,677 - u_1 - u_2 \\ 2,500 - u_2 - u_3 \\ 2,323 - u_3 - u_4 \\ 2,250 - u_4 - u_5 \end{cases} \tag{5.7}$$

Tab. V.17 – Cas test 7 : Définition des variables aléatoires

Variable aléatoire	Loi	moyenne	écart-type
u_1	Normale	0,0	1,0
u_2	Normale	0,0	1,0
u_3	Normale	0,0	1,0
u_4	Normale	0,0	1,0
u_5	Normale	0,0	1,0

Le tableau V.18 rassemble les indices de fiabilité généralisés de référence (exact, FORM, SORM (avec la formule de Breitung)) et ceux calculés par les méthodes *non intrusives* (projection et régression) calculés par FORM et avec un tirage d'importance (coefficient de variation de la simulation d'environ 5%) à partir du développement de g sur la base du chaos. Les méthodes *non intrusives* permettent

d'obtenir l'indice de fiabilité avec une erreur de 10% à partir de 3 points d'intégration pour la méthode de quadratures et de 224 (=$4P$) points dans le plan d'expériences de la méthode de régression. Les résultats dans ce cas ne sont pas très probants.

Tab. V.18 – Cas test 7 : Indice de fiabilité associé à la fonction d'état limite 5.7

	Référence	FORM	SORM	Projection	Régression
				6 (=7776 calculs)	1024 points
β	3,52	2,73	4,15	3,04	3,47

V.2.7 Conclusion

Le cas test 1 a permis de montrer que les méthodes non intrusives sont efficaces dans le cas d'une analyse de fiabilité dont l'état limite (qui dépend de 6 variables) est bruité. Les cas tests 2 à 5 permettent de dire que les méthodes *non intrusives* approximent bien un état limite défini comme étant un polynôme d'ordre 2 dans l'espace physique et standard. Les cas 6 et 7 permettent de tester les méthodes *non intrusives* sur des systèmes séries et parallèle. Les résultats ne sont pas très probants notamments quand les différentes branches d'un système parallèle ont un indice de fiabilité voisin.

V.3 Tassement d'une fondation

Cet exemple reprend les travaux issus de [SBL03b, SBL03a, SBL04, SBL05].

V.3.1 Position du problème

On considère un massif de sol linéairement élastique d'épaisseur t reposant sur un substratum rigide. Il est composé de deux couches horizontales d'épaisseur t_1 et t_2. Une fondation reposant sur ce massif est modélisée par deux pressions P_1 et P_2 appliquées respectivement sur un segment de longueur $2B_1$ et $2B_2$ de sa surface libre. La figure V.5 représente le schéma et le maillage de la fondation. Les paramètres de la fondation sont donnés dans le tableau V.19. Les éléments utilisés sont des quadrangles isoparamétriques linéaires QUAD4. Le maillage est constitué de 99 noeuds et 80 éléments. Le problème est traité en déformations planes. Les déplacements horizontaux des bords droit et gauche sont imposés nuls ainsi que les déplacements horizontaux et verticaux sur la ligne horizontale inférieure de la fondation. Toutes les données relatives aux différentes variables aléatoires sont rassemblées dans le tableau V.20. Aucune corrélation entre les différentes variables aléatoires n'a été prise en compte. Le tassement maximal calculé aux

valeurs moyennes des variables aléatoires est $u_{max} = -11,09\,\text{cm}$, obtenu au nœud supérieur gauche du maillage.

Tab. V.19 – Paramètres du modèle déterministe de la fondation

Paramètre	Notation	Valeur
Epaisseur de la couche de sol	t	30 m
Epaisseur de la couche de sol supérieure	t_1	7,75 m
Epaisseur de la couche de sol inférieure	t_2	22,25 m
Largeur de la fondation 1	$2B_1$	10 m
Largeur de la fondation 2	$2B_2$	5 m
Largeur du maillage	L	60 m

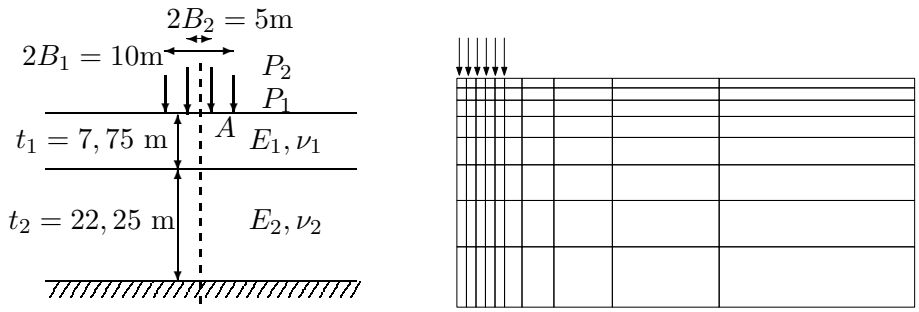


Fig. V.5 – Schéma de la fondation et maillage associé

Tab. V.20 – Définition des variables aléatoires de la fondation

Paramètre	Notation	Loi	Moyenne	Coef. de Var.
Module d'Young couche sup.	E_1	Lognormale	50 MPa	20%
Module d'Young couche inf.	E_2	Lognormale	70 MPa	20%
Coefficient de Poisson couche sup.	ν_1	Uniforme $[0,28; 0,32]$	0,3	4%
Coefficient de Poisson couche inf.	ν_2	Uniforme $[0,28; 0,32]$	0,3	4%
Chargement 1	P_1	Weibull	0,2 MPa	30%
Chargement 2	P_2	Lognormale	0,4 MPa	20%

V.3.2 Calcul des moments de la réponse

Dans cette section, on compare les moments statistiques du tassement maximum de la fondation obtenus avec les différentes méthodes intrusives et non intrusives décrites précédemment. Ils sont rassemblés dans le tableau V.21. Les résultats de référence sont obtenus par une méthode de simulation de Monte Carlo avec 10000 simulations.
La figure V.6 montre l'évolution des moments normés par leur estimation finale en fonction du nombre de simulations. On voit qu'il faut avoir au minimum 10000 points pour avoir des résultats corrects pour l'asymétrie et l'aplatissement. On remarque dans le tableau V.21 que l'on obtient la même précision avec les méthodes MEFS (approche intrusive), de projection et de régression (approches non intrusives), pour la moyenne et pour l'écart-type à condition de prendre suffisamment de points de calcul (≥ 3 pour chaque dimension, soit $6^3 = 216$ calculs pour la méthode de projection et supérieur à 420 pour la méthode de régression).
En revanche, la MEFS intrusive ne permet pas d'obtenir une aussi bonne précision que les méthodes *non intrusives* pour l'asymétrie et l'aplatissement. En effet, en prenant 4 points d'intégration dans la méthode de projection (64 calculs) et 420 points dans le plan d'expériences de la méthode de régression, on obtient une précision supérieure à celle obtenue avec la MEFS intrusive. Pour cette dernière, on remarque que la méthode de résolution directe à l'ordre 3 permet d'obtenir de meilleurs résultats que la méthode de résolution hiérarchique (voir détails dans [BS03]) à l'ordre 3 avec une pré-résolution à l'ordre 2 (notée 3(2) dans le tableau V.21) et ce pour les moments d'ordre 3 et 4. Pour la méthode de projection, on remarque qu'à partir de 4 points d'intégration, la précision des résultats n'augmente plus.
Les résultats de la méthode de régression avec un nombre de points inférieur à 420 ne sont pas satisfaisants à cause d'un problème de conditionnement du système à résoudre (la matrice est quasi-singulière). Ce problème disparaît lorque le nombre de points du plan d'expériences augmente.

La figure V.7 présente l'évolution des quatre premiers moments statistiques normés par la valeur obtenue avec la méthode de régression en utilisant toutes les combinaisons possibles des points en fonction du nombre de points du plan d'expériences. On remarque qu'à partir de 420 points, c'est-à-dire 5 fois la taille du chaos polynomial, les ratios des différents moments sont quasiment égaux à 1. Prendre plus de 420 points n'améliore pas les résultats dans cet exemple.

V.3.3 Analyse de fiabilité

Présentation

On s'intéresse maintenant à la fiabilité de la fondation en service vis-à-vis d'un critère

Tab. V.21 – Fondation : Moments statistiques du déplacement maximal

	Couplage MC	MEFS		Projection			
moment	10000	3	3(2)	2 pts	3 pts	4 pts	5 pts
moyenne	-1,097	-1,109	-1,109	-1,106	-1,108	-1,108	-1,108
écart-type	0,0256	0,0250	0,0249	0,0320	0,0250	0,0250	0,0250
asymétrie	-0,6019	-0,4820	-0,4461	-0,1514	-0,5048	-0,5245	-0,5231
aplatissement	3,7214	3,4364	3,4364	3,8314	3,4777	3,4989	3,4967
				Régression			
	84	168	252	336	420	504	4096
moyenne	-0,566	-0,735	-0,896	-1,040	-1,108	-1,108	-1,108
écart-type	0,0802	0,0747	0,0624	0,0439	0,0250	0,0250	0,0250
asymétrie	1,6664	1,9638	2,0864	2,3967	-0,5182	-0,5249	-0,5303
aplatissement	8,7149	10,9272	14,9927	23,7676	3,4826	3,5068	3,5095

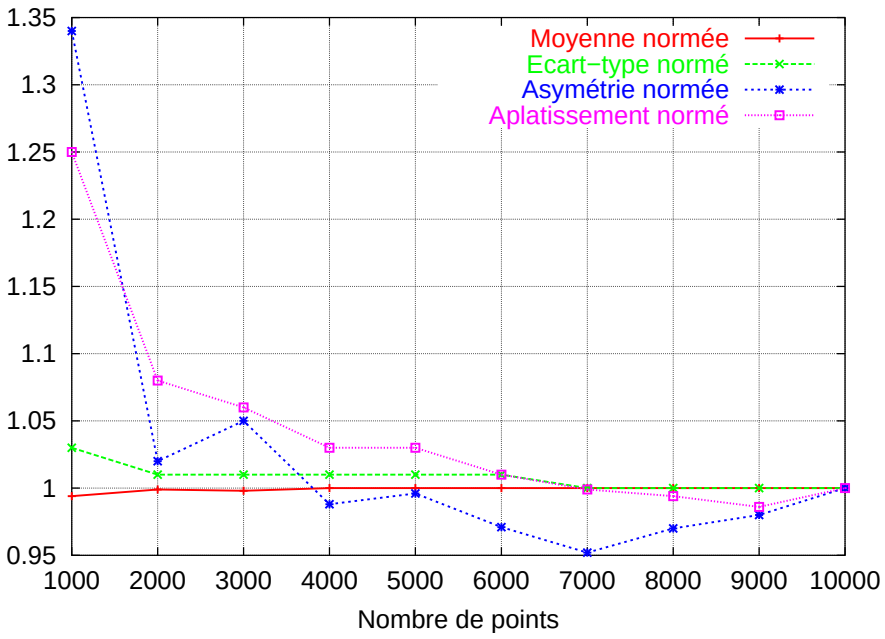


Fig. V.6 – Evolution des moments obtenus en fonction du nombre de simulations de Monte Carlo

de tassement admissible. La fonction d'état limite associée s'écrit :

$$g(\mathbf{U}) = u_S - U^{i_0} \tag{5.8}$$

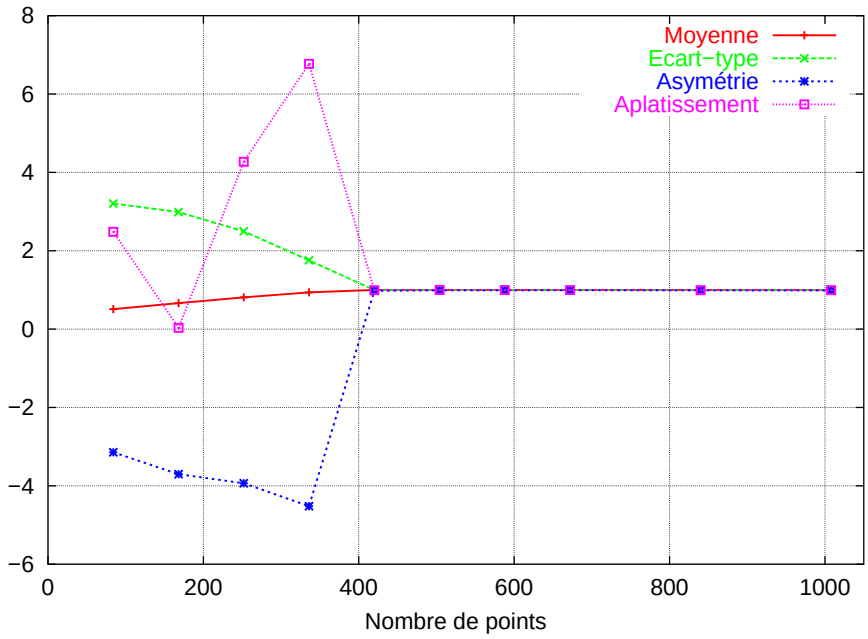


Fig. V.7 – Evolution des moments en fonction du nombre de points du plan d'expériences dans la méthode de régression

où U^{i_0} est le déplacement vertical du nœud supérieur gauche et u_S est la valeur seuil à ne pas dépasser. On peut remplacer U^{i_0} par son développement dans le chaos polynomial.

Résultats

Le tableau V.22 présente les probabilités de défaillance obtenues par les différentes méthodes pour différentes valeurs du seuil u_S. Les résultats de référence sont obtenus par une méthode d'échantillonnage d'importance (c'est à dire une analyse FORM suivie d'une simulation de Monte Carlo autour du point de conception (avec 1000 tirages et coefficient de variation de la simulation maximum de 0,09%)). Les probabilités de défaillance obtenues par les méthodes de développement sur la base du chaos polynomial le sont obtenues par une méthode d'échantillonnage d'importance (1000 tirages et coefficient de variation de la simulation maximum de 0,77%)). Il faut noter que 1000 tirages de Monte Carlo pour la solution de référence correspondent à 1000 calculs aux éléments finis, alors que les 1000 tirages sur la solution approchée par le chaos polynomial sont quasi-instantanés.

On remarque que pour la MEFS intrusive, la méthode de résolution directe est plus précise que la méthode hiérarchique. Pour la méthode de projection, il faut au moins avoir 3 points d'intégration pour obtenir de bons résultats. Les résultats avec 4 et 5 points convergent vers la solution de référence, mais l'amélioration est peu importante. Le tableau V.23 présente le nombre de calculs en fonction du nombre de points d'intégration.

Pour la méthode de régression, les résultats obtenus sont corrects à partir de 420 points dans le plan d'expériences (voir figures V.8 et V.9 qui représentent respectivement pour l'évolution de la probabilité de défaillance et de l'indice de fiabilité en fonction du nombre de points du plan d'expériences). Les résultats obtenus par les méthodes *non intrusives* sont plus précis que ceux obtenus par la MEFS intrusive et ce pour tous les ordres de grandeur de la probabilité de défaillance (de 10^{-1} à 10^{-4}).

Tab. V.22 – Fondation : Probabilité de défaillance P_f

seuil	Couplage IS	MEFS		Projection		
(cm)	1000	3	3(2)	3 pts	4 pts	5 pts
12	$3,09.10^{-01}$	$3,14.10^{-01}$	$3,58.10^{-01}$	$3,29.10^{-01}$	$3,37.10^{-01}$	$3,16.10^{-01}$
15	$6,83.10^{-02}$	$7,20.10^{-02}$	$5,93.10^{-02}$	$7,33.10^{-02}$	$6,37.10^{-02}$	$6,73.10^{-02}$
20	$2,13.10^{-03}$	$1,62.10^{-03}$	$6,97.10^{-04}$	$1,81.10^{-03}$	$1,87.10^{-03}$	$2,01.10^{-03}$
22	$4,61.10^{-04}$	$3,12.10^{-04}$	$6,75.10^{-05}$	$3,71.10^{-04}$	$3,99.10^{-04}$	$4,01.10^{-04}$
seuil	Régression					
(cm)	84	252	336	420	504	4096
12	$1,62.10^{-01}$	$2,67.10^{-01}$	$3,31.10^{-01}$	$3,23.10^{-01}$	$3,27.10^{-01}$	$3,32.10^{-01}$
15	$6,77.10^{-02}$	$7,18.10^{-02}$	$8,43.10^{-02}$	$6,73.10^{-02}$	$6,98.10^{-02}$	$6,93.10^{-02}$
20	-	$4,65.10^{-04}$	$8,22.10^{-04}$	$2,01.10^{-03}$	$2,00.10^{-03}$	$1,98.10^{-03}$
22	-	$1,16.10^{-05}$	$1,31.10^{-04}$	$3,80.10^{-04}$	$3,54.10^{-04}$	$4,24.10^{-04}$

V.3.4 Performances

Dans cette section, nous allons comparer les temps de calcul des coefficients du développement avec les différentes méthodes. Le tableau V.23 donne les temps de résolution du problème, l'unité de calcul étant la durée d'un calcul aux éléments finis déterministe. On remarque que c'est la méthode de projection (3 points de quadratures, 216 calculs élémentaires) qui permet d'avoir les meilleurs résultats en terme de précision/efficacité. Une précision supplémentaire est obtenue avec la méthode de régression (420 points) dont les résultats sont quasiment identiques à la méthode de projection avec 5 points d'intégration pour un coût de calcul 18 fois moindre.
Le tableau V.23 donne aussi un indicateur de la précision ε pour chacune des méthodes. Cet indicateur est donné par :

$$\varepsilon = \frac{1}{4} \sum_{seuil=12,15,20,22} \left| \frac{\log(P_{f_{Methode}}) - \log(P_{f_{Couplage}})}{\log(P_{f_{Couplage}})} \right| \tag{5.9}$$

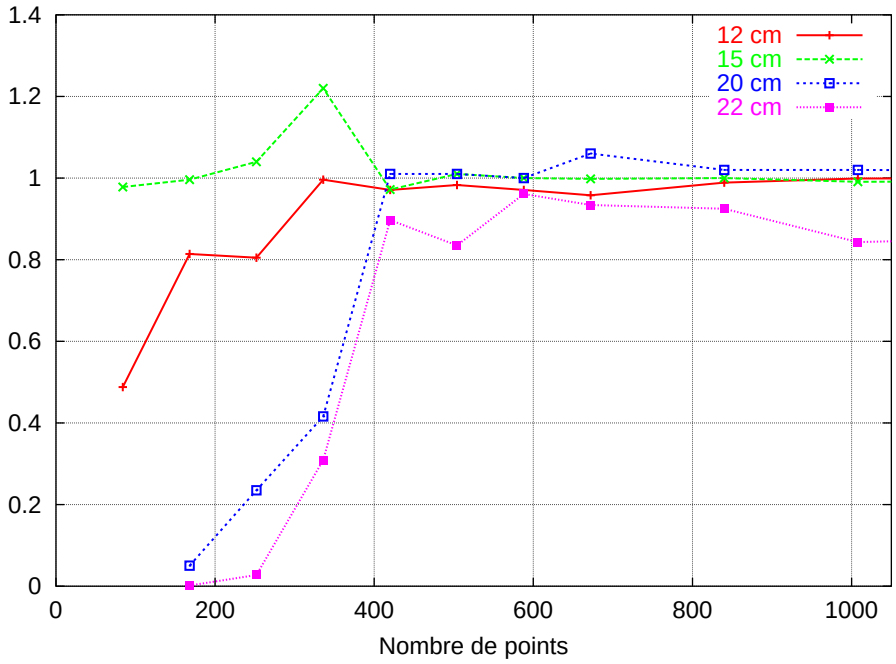


Fig. V.8 – Evolution des probabilités de défaillance normées par la valeur de référence en fonction du nombre de points du plan d'expériences dans la méthode de régression

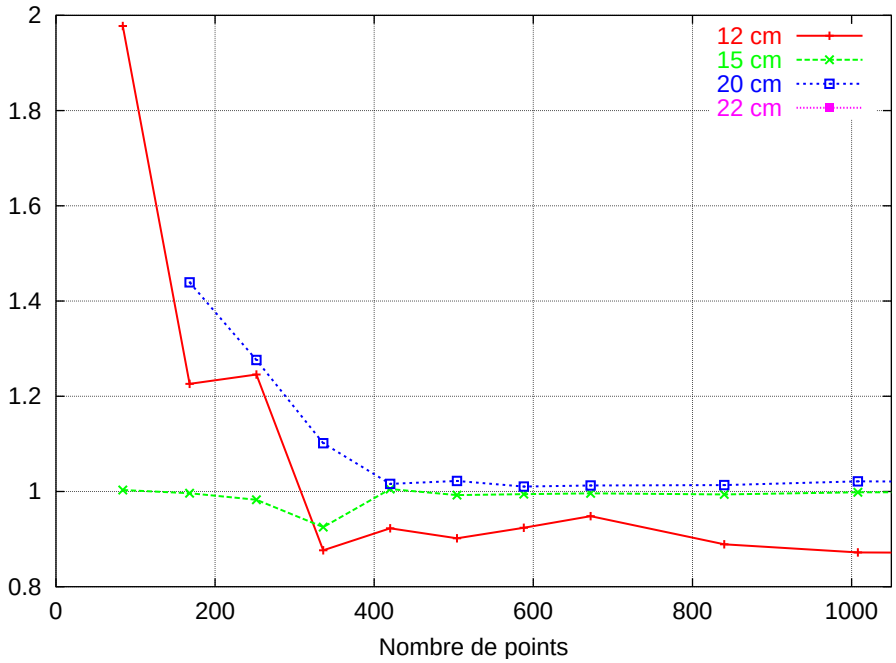


Fig. V.9 – Evolution des indices de fiabilité normés par la valeur de référence en fonction du nombre de points du plan d'expériences dans la méthode de régression

Ce tableau confirme les résultats précédents : la résolution directe donne des résultats plus précis que la résolution hiérarchique. Par ailleurs, lorsque le nombre de points d'intégration augmente dans la méthode de projection, la précision des résultats augmente. Ce tableau montre également que la précision augmente avec le nombre de points dans la méthode de régression (elle devient inférieure à 5% à partir de 420 points). Cependant, on remarque que lorsque l'on prend la totalité des combinaisons possibles pour les points de collocation, la précision diminue. On peut penser que cela est dû au fait que, dans la minimisation au sens des moindres carrés, on essaye de diminuer l'erreur à trop de points : le système serait donc trop contraint. Ceci pourrait peut-être évité en prenant un chaos d'ordre supérieur.

Tab. V.23 – Fondation : Temps de calcul

	MEFS		Projection				
	3	3(2)	2 pts	3 pts	4 pts	5 pts	
durée	2247	142	36	216	1296	7776	
précision moyenne (en %)	3,48	19,80	37,11	6,59	8,24	2,21	
			Régression				
nombre de points	84	168	252	336	420	504	4096
durée	84	168	252	336	420	504	4096
précision moyenne (en %)	24,65	21,41	17,56	13,93	3,69	4,80	5,66

V.3.5 Conclusion

Cet exemple de mécanique élastique linéaire nous a permis de comparer les méthodes MEFS et non intrusives (de projection et de régression) avec le calcul des moments statistiques de la réponse (analyse centrale) et dans des analyses de fiabilité (queues de distribution). Les résultats de référence ont été obtenus avec un couplage entre un code aux éléments finis et un code probabiliste en utilisant des méthodes standards (simulation de Monte Carlo et tirages d'importance). En analyse centrale (notamment pour les moments d'ordre 3 et 4) et pour les analyses de fiabilité, les méthodes non intrusives sont plus précises que la MEFS. La méthode de projection (avec les quadratures) converge à partir de 3 points d'intégration (l'ordre du chaos est 3). La méthode de régression donne de bons résultats dès que l'on a un nombre de points supérieur à $(M-1)P$ points. Une fois ce nombre atteint, la précision des calculs n'augmente plus. Les méthodes non intrusives sont également plus efficaces que la MEFS, utilisée avec une méthode de résolution directe. En effet, les résultats de référence sont obtenus avec un temps de calcul environ 10 fois moins important.

V.4 Convergence d'un tunnel

Cet exemple est issu de [BSL04a, BSL04b]

V.4.1 Position du problème

On s'intéresse dans cette section à un tunnel non soutenu creusé dans un massif d'extension infinie. La roche est considérée non fracturée, homogène. Le tunnel est de section circulaire, de rayon $R = 1$ m (figure V.10). On considère un champ de contraintes initiales homogène autour du tunnel. Généralement, cette contrainte correspond à la pression lithostatique P_0 associée au poids des terres à la profondeur du tunnel. On suppose que le comportement de la roche est élastique et on raisonne en déformations planes. Les paramètres du matériau, du chargement et de la géométrie sont donnés dans le tableau V.24. Le module d'Young E de la roche est de 50 MPa et son coefficient de Poisson ν de 0,2. Les symétries du problème permettent de ne mailler qu'un quart du massif de sol. Le maillage est constitué de 462 noeuds et 420 éléments quadrangles QUAD4 linéaires. Des raisons de symétrie imposent le blocage des déplacements horizontaux de la ligne (DE), ainsi que les déplacements verticaux de la ligne (AB). Pour représenter la nullité du champ de déplacements à l'infini, les déplacements horizontaux et verticaux des lignes (DC) et (BC) sont également imposés nuls.

Tab. V.24 – Paramètres du modèle déterministe du tunnel

Paramètre	Notation	Valeur
Epaisseur de la couche de sol	L	20 m
Rayon du tunnel	R	1 m
Contrainte initiale horizontale	σ^0_{XX}	-0,1 MPa
Contrainte initiale verticale	σ^0_{YY}	-0,2 MPa
Coefficient de pression des terres au repos	$K_0 = \frac{\sigma^0_{XX}}{\sigma^0_{YY}}$	0,5
Module d'Young	E	50 MPa
Coefficient de Poisson	ν	0,2

Le maillage utilisé pour le calcul aux éléments finis est représenté dans la figure V.11. En utilisant les valeurs contenues dans le tableau V.24, nous obtenons un déplacement vertical du point E de 6,05 mm.

V.4.2 Introduction des aléas dans le modèle

Du fait de l'introduction de paramètres aléatoires (tableau V.25), le déplacement radial u^E du point E devient une variable aléatoire $U^E(\theta)$. On définit le coefficient

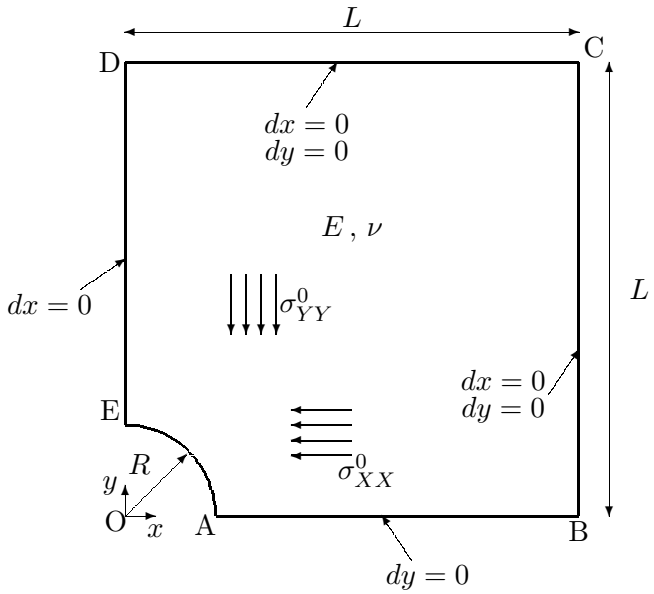


Fig. V.10 – Convergence d'un tunnel non soutenu dans un massif élastique

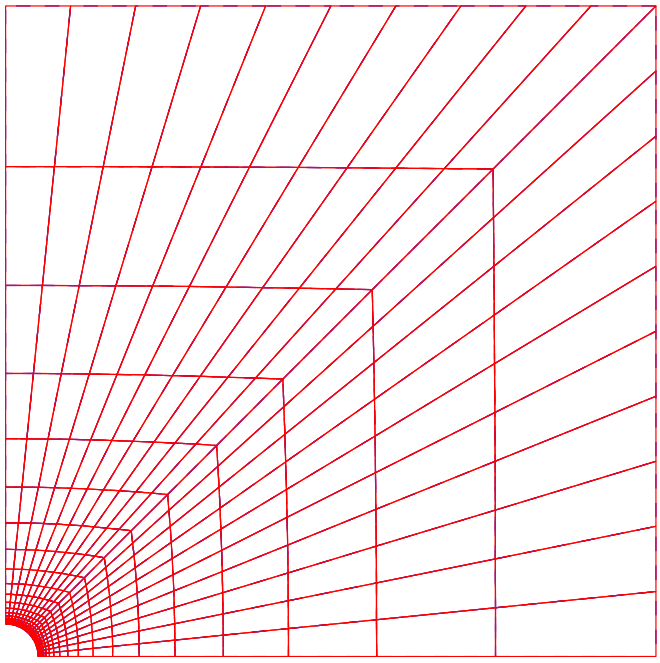


Fig. V.11 – Maillage d'un quart de tunnel

de pression des terres au repos par $K_0 = \frac{\sigma^0_{XX}}{\sigma^0_{YY}}$. Le déplacement radial aléatoire du

point E est développé sur la base du chaos polynomial :

$$U^E(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} U_j^E \Psi_j(\{\xi_k(\theta)\}_{k=1}^M) \tag{5.10}$$

où U_j^E sont les coefficients à déterminer, $\{\xi_k(\theta)\}_{k=1}^M$ sont des variables aléatoires gaussiennes centrées réduites et Ψ_j les polynômes d'Hermite multidimensionnels.

Tab. V.25 – Paramètres aléatoires du modèle du tunnel

Paramètre	Notation	Loi	Moyenne	Coefficient de variation
Contrainte initiale verticale	$-\sigma_{YY}^0$	Lognormale	0,2	30%
Coefficient de pression des terres au repos	K_0	Lognormale	0,5	10%
Module d'Young	E	Lognormale	50 MPa	20%
Coefficient de Poisson	ν	Uniforme [0,1 ;0,3]	0,2	29%

V.4.3 Calcul des moments de la réponse

Dans cette section, on compare les moments statistiques de la convergence maximale du tunnel obtenus avec les différentes méthodes décrites précédemment. Les résultats sont rassemblés dans le tableau V.26. Les résultats de référence sont obtenus à l'aide d'une simulation de Monte Carlo avec 30000 simulations.
On remarque que pour la MEFS intrusive à l'ordre 3, les méthodes de résolution directe (p=3) et hiérarchique avec une pré-résolution à l'ordre 2 (p=3(2)) permettent d'obtenir avec une précision quasiment identique la moyenne et de coefficient de variation. En revanche, la méthode directe fournit de meilleurs résultats pour l'asymétrie et l'aplatissement.
La méthode de projection a été utilisée avec 4, 6 et 7 points d'intégration (cf. Tableau V.29 pour le nombre d'appels au code éléments finis en fonction du nombre de points d'intégration). On remarque que dès 4 points d'intégration les résultats sont très satisfaisants et meilleurs que ceux obtenus par la MEFS intrusive notamment pour l'asymétrie et l'aplatissement. La méthode de régression a été utilisée avec 35, 70 et 256 points. La taille du chaos étant de 35, ces nombres de points correspondent à une fois, deux fois la taille du chaos et à toutes les combinaisons possibles des racines. On remarque qu'il faut au minimum 70 points pour avoir des résultats satisfaisants et que prendre plus de points n'apporte rien dans notre cas. Le fait que l'origine fasse partie des racines n'apporte de la précision que lorsque le nombre de points du plan d'expériences est de 35. Les résultats obtenus par la MEFS intrusive ne sont

pas très bons à cause de l'approximation de la loi uniforme définie sur l'intervalle $[0,1;0,3]$ (voir paragraphe III.2). En revanche, les méthodes non intrusives ne font pas d'approximation, et les résultats sont donc plus précis.

Tab. V.26 – Tunnel : Moments statistiques du déplacement maximal

	Monte Carlo	MEFS intrusive		Projection		
moment	30000	p=3	p=3(2)	4 pts	6 pts	7 pts
u_E/u_E^m	1,017	1,031	1,031	1,021	1,021	1,021
Coeff. de Var.	0,426	0,427	0,426	0,431	0,431	0,431
asymétrie	-1,137	-0,807	-0,723	-1,134	-1,135	-1,135
aplatissement	5,388	4,209	3,825	5,309	5,316	5,316
	Régression (nombre de points)					
	35	70	256			
u_E/u_E^m	1,311	1,021	1,018			
Coeff. de Var.	1,157	0,431	0,433			
asymétrie	-0,919	-1,133	-1,179			
aplatissement	13,4103	5,312	5,460			

V.4.4 Analyse fiabiliste

Présentation

On s'intéresse maintenant à la fiabilité du tunnel en service vis-à-vis d'un critère de déplacement admissible. La fonction d'état limite associée s'écrit :

$$g(\mathbf{U}) = u_S - U^E \tag{5.11}$$

où U^E est le déplacement vertical du point E et u_S est la valeur seuil à ne pas dépasser. On peut remplacer U^E par son développement sur le chaos polynomial.

Résultats

Les indices de fiabilité $\beta = -\Phi^{-1}(P_f)$ associés à l'état limite (5.11) pour différentes valeurs du seuil u_S sont rassemblés dans le tableau V.27. Les résultats de référence sont obtenus par une méthode d'échantillonnage d'importance (c'est-à-dire une analyse FORM suivie d'une simulation autour du point de conception (1000 tirages et coefficient de variation de la simulation de 0,08%)). Pour la méthode de projection, on remarque que les résultats n'évoluent quasiment plus dès 4 points d'intégration. Pour la méthode de régression, les résultats obtenus avec 35 points ne sont pas satisfaisants. En revanche, en prenant 70 points, on obtient des résultats proches de ceux obtenus avec la totalité des points (256).

Tab. V.27 – Tunnel : Indice de fiabilité β pour différentes valeurs du seuil u_S

seuil (u_S)	Couplage	MEFS intrusive		Projection		
(cm)	FORM	$p=3$	$p=3(2)$	4 pts	6 pts	7 pts
7	0,3707	0,2835	0,2932	0,3045	0,3032	0,3025
8	0,7003	0,6442	0,6659	0,6687	0,6674	0,6670
9	0,9953	0,9941	1,0252	1,0175	1,0164	1,0160
10	1,2617	1,3190	1,3686	1,3489	1,3479	1,3475
12	1,7284	1,9686	2,0025	1,9580	1,9571	1,9567
15	2,3072	2,8268	2,8227	2,7524	2,7514	2,7509
17	2,6352	3,3406	3,2958	3,2175	3,2165	3,2159
20	3,0642	4,0389	3,9209	3,8408	3,8395	3,8387

seuil	Couplage IS	Régression (nombre de points)		
(cm)	1000 tirages	35	70	256
7	0,4270	0,0917	0,3064	0,3120
8	0,7594	0,1848	0,6711	0,6768
9	1,0458	0,2774	1,0198	1,0261
10	1,3085	0,3701	1,3501	1,3574
12	1,7657	0,5562	1,9553	1,9650
15	2,3280	0,8364	2,7408	2,7554
17	2,6265	1,0217	3,1991	3,2178
20	3,3417	1,2950	3,8111	3,8371

V.4.5 Résultats complémentaires

Pour la résolution par la méthode de régression, on peut comparer l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée en chacun des points du plan d'expériences. Le tableau V.28 rassemble les valeurs de la moyenne des erreurs aux points du plan d'expériences ainsi que la variance de l'erreur, la plus petite erreur et la plus grande erreur en valeur absolue. On remarque que sauf pour le cas "35 points", l'erreur moyenne est nulle. Il n'y a donc pas de biais introduit par le développement sur le chaos polynomial. Le fait qu'il y ait des erreurs plus importantes et que la variance de l'erreur augmente lorsqu'on prend tous les points possibles vient du fait qu'on prend en compte des points plus éloignés de l'origine et que l'approximation se fait moins bien dans les queues de distribution. La figure V.12 présente l'erreur en fonction de la norme du point du plan d'expérience. On remarque que plus la norme augmente (*i.e.* le point est éloigné de l'origine), plus l'erreur augmente. Ceci confirme le fait que l'approximation est moins bonne dans les queues de distribution. La figure V.13 représente un histogramme de l'erreur. Cette erreur présente un

caractère gaussien. Il serait sans doute possible d'améliorer a posteriori la précision du développement polynomial en rajoutant une erreur de modèle.
Le tableau V.28 présente également la statistique R^2 [Sap90], qui représente une mesure globale de la corrélation entre les réponses théoriques (issues des calculs éléments finis) et approchées (issues de l'approximation dans le chaos polynomial) pour la méthode de régression. Cette statistique est utilisée pour tester la qualité de l'ajustement. Si l'on part du nombre minimal d'expériences alors $R^2 = 1$ et l'ajustement est parfait. En partant du nombre minimal d'expériences, on peut rajouter des expériences jusqu'à ce qu'on dépasse un palier pour R^2 (une valeur d'environ 90% est généralement admise). La définition de R^2 est donnée par :

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{k=1}^{N} \left(s_{EF}^k - s_{CP}^k\right)^2}{\sum_{k=1}^{N} \left(s_{EF}^k - \bar{s}_{EF}\right)^2} \tag{5.12}$$

où l'on a noté s_{EF}^k les résultats issus du k-ième calcul aux éléments finis, s_{CP}^k les résultats issus de l'approcimation par le chaos polynomial pour le k-ième point du plan d'expériences et $s_{\bar{EF}}$, la moyenne des résultats issus des calculs aux éléments finis pour tous les points du plan d'expériences et N est la taille du plan d'expériences. On remarque que quelque soit le nombre de points dans la plan d'expériences, la statistique R^2 est proche de 1, alors que l'on a vu dans les résultats précédents (sur les moments statistiques et sur les probabilités de défaillance) que 35 points ne suffisent pas pour obtenir de bons résultats. La statistique R^2 n'est donc pas discriminante.

Tab. V.28 – Tunnel : Erreur entre la solution exacte et la solution approchée en chacun des points du plan d'expériences

	Régression (nombre de points)		
	35	70	256
Moyenne de l'erreur (%)	-9,81	-0,01	-0,01
Ecart-type de l'erreur	50,42	0,66	3,24
Plus petite erreur (%)	-0,89	0,01	0,0004
Plus grande erreur (%)	-106,58	2,58	-22,81
R^2	0,9988	0,9721	0,9849

Le tableau V.29 rassemble les différents temps de calcul (l'unité étant le nombre de calculs de la fonction d'état limite) pour le calcul des coefficients du développement de la réponse avec les méthodes MEFS et non intrusives (de projection avec quadratures et de régression).

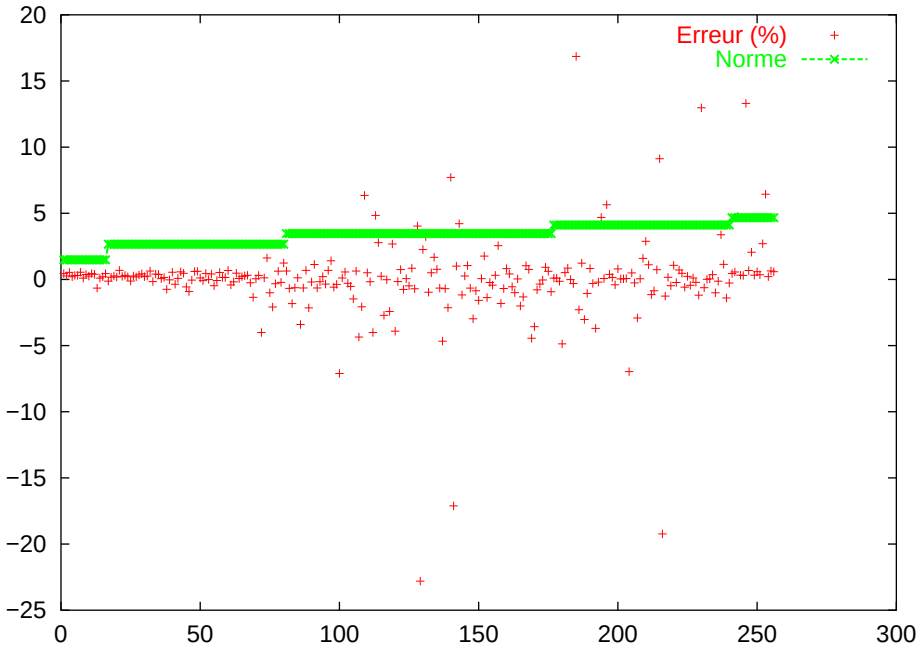


Fig. V.12 – Tunnel : Erreur entre la solution exacte et la solution approchée en chacun des points du plan d'expériences

Tab. V.29 – Tunnel : Temps de calcul

	MEFS		Projection		
	3	3(2)	4 pts	6 pts	7 pts
durée	4260	462	256	1296	2401
	Régression				
nombre de points	35	70	256		
durée	35	70	256		

V.4.6 Conclusion

Cet exemple d'application en mécanique élastique linéaire nous a permis de comparer la méthode MEFS avec les méthodes non intrusives de projection (avec les quadratures) et de régression ; les résultats de référence étant obtenus par couplage entre un code aux éléments finis et un code probabiliste avec les méthodes standard de résolution (Monte Carlo pour le calcul des moments statistiques de la réponse et tirage d'importance pour les analyses de fiabilité). Comme dans l'exemple précédent, les méthodes non intrusives (projection et régression) sont plus précises que la MEFS pour le calcul des moments d'ordres 3 et 4, ainsi que pour les analyses de fiabilité. La méthode de projection avec les quadratures a convergé avec 4 points d'intégration

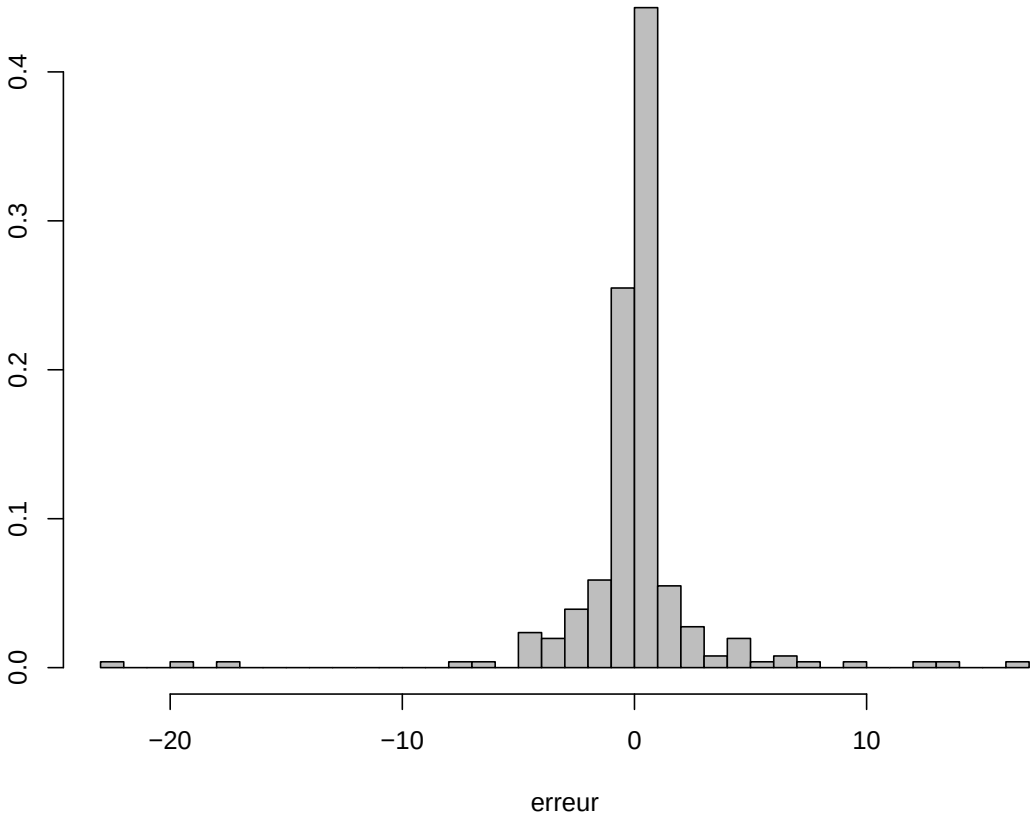


Fig. V.13 – Tunnel : Histogramme de l'erreur entre la solution exacte et le développement polynomial (256 points)

et celle de régression dès que le nombre de points de collocation a atteint $(M-1)P$ points.

V.5 Tuyau fissuré

Dans cet exemple d'application [PMLH00], les méthodes non intrusives sont utilisées pour un calcul en mécanique non linéaire de la rupture. La méthode *intrusive* des éléments finis stochastiques ne peut être utilisée car le matériau considéré suit une loi de comportement non linéaire [BSL05c, BSL05a, BSL05b].

V.5.1 Présentation de l'étude

On considère une tuyauterie droite fissurée en peau interne soumise à un chargement de pression et de traction combinée comme le montre la figure V.14. Les paramètres du modèle mécanique sont rassemblés dans le tableau V.30.

Tab. V.30 – Paramètres déterministes du modèle du tuyau

Paramètre	Notation	Valeur
Longueur de la fissure	a	15 mm
Longueur de la tuyauterie modélisée	L	1000 mm
Pression interne	P	15,5 MPa
Rayon interne du tuyau	R_i	393,5 mm
Epaisseur du tuyau	t	62,5 mm
Contrainte de traction appliquée	σ_t	varie de 0 à 200 MPa
Contrainte de traction due à l'effet de fond		$\sigma_0 = P\dfrac{R_i^2}{(R_i+t)^2 - R_i^2}$

Le comportement du matériau est supposé être décrit par une loi de type Ramberg-Osgood dont la relation contrainte/déformation dans le cas unidimensionnel peut s'écrire :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha\frac{\sigma_y}{E}\left(\frac{\sigma}{\sigma_y}\right)^n \tag{5.13}$$

où E est le module d'Young du matériau, σ_y sa limite élastique, n un coefficient d'écrouissage et α un coefficient de lissage. La courbe de traction du matériau est présentée dans la figure V.15.
Etant donné les symétries du problème, on ne modélise qu'une moitié de la structure à l'aide d'éléments isoparamétriques quadratiques (figure V.16).

V.5.2 Définition des variables aléatoires

L'aléa est introduit au niveau du module d'Young, de la limite d'élasticité, du coefficient d'écrouissage et du coefficient de lissage (tableau V.31). On s'intéresse au développement de l'intégrale de Rice J sur la base du chaos polynomial. Le

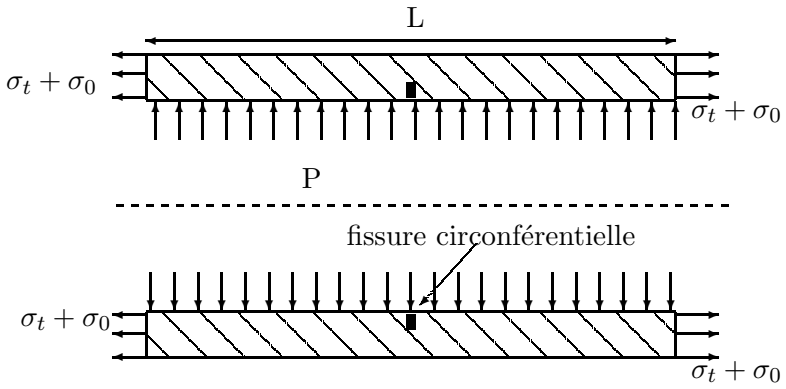


Fig. V.14 – Schéma du tuyau

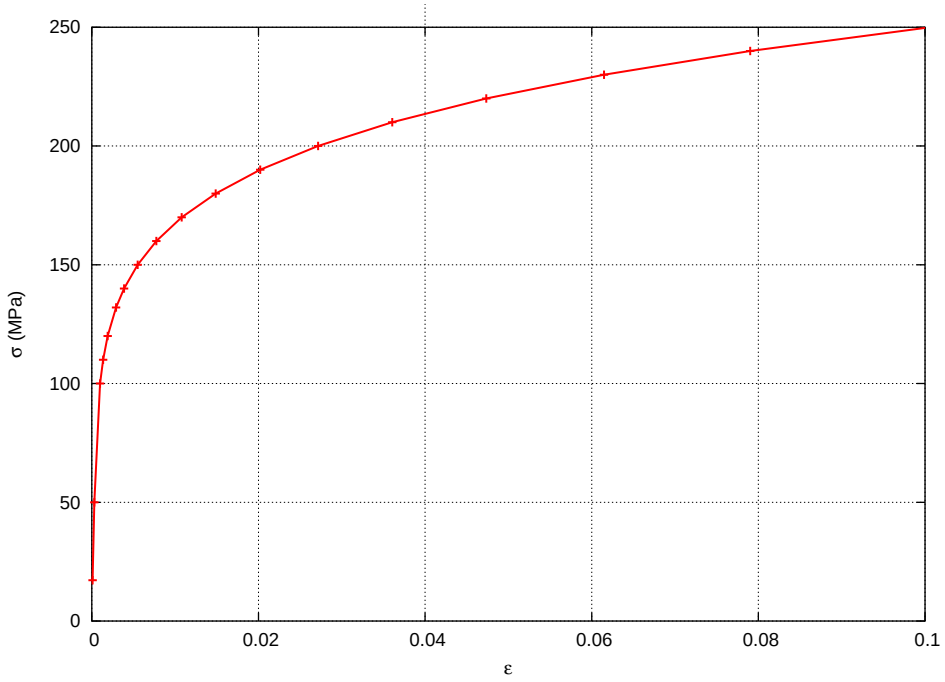


Fig. V.15 – Tuyau : Courbe de traction du matériau

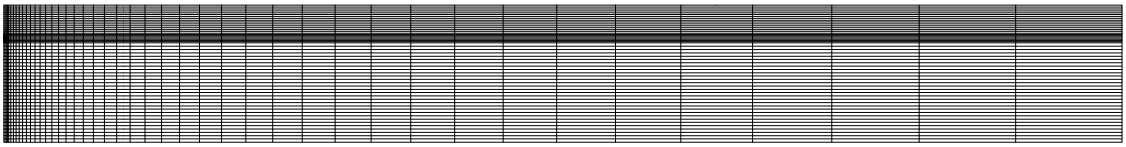


Fig. V.16 – Maillage de la tuyauterie fissurée

développement de la réponse est recherché sur un chaos polynomial de degré 3. Comme il y a 4 variables aléatoires, la représentation de chaque quantité calculée correspond au calcul de $P = \frac{(4+3)!}{4!3!} = 35$ coefficients. La variable aléatoire $J_{0,2}$ n'intervient que dans la fonction d'état limite utilisée pour des analyses de fiabilité et pas dans le calcul de J.

Tab. V.31 – Description des variables aléatoires d'entrée

Paramètre	Notation	Distribution	Moyenne	Coef. de Var.
Module d'Young	E	Lognormale	175 500 MPa	5%
Coefficient de lissage	α	Normale	1,15	13%
Coefficient d'écrouissage	n	Normale	3,5	3%
Limite élastique	σ_y	Lognormale	259,5 MPa	3,8%
Ténacité	$J_{0,2}$	Lognormale	52 MPa.mm	18,27%

Nous allons utiliser les méthodes *non intrusives* pour calculer les moments statistiques de l'intégrale de Rice J (Eq. 5.14 Figure V.17) [FPZ93] et pour faire des analyses de fiabilité sur un critère d'amorçage de fissure.

$$J = \int_{\Gamma} \left(W dy - \underline{T} \frac{\partial \underline{u}}{\partial x} ds \right) \tag{5.14}$$

où W est la densité élastique telle que $\sigma_{ij} = \dfrac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}$, $\underline{T}$ est le vecteur contrainte en un point M du contour Γ avec la normale tournée vers l'extérieur et $\underline{u}$ est le vecteur déplacement au même point. Les résultats de référence sont obtenus par un couplage entre le Code_Aster et PROBAN avec FORM pour les analyses de fiabilité. Aucun résultat de référence n'est disponible pour les moments de la réponse à cause de la taille trop grande de l'échantillon nécessaire dans une méthode de simulation.

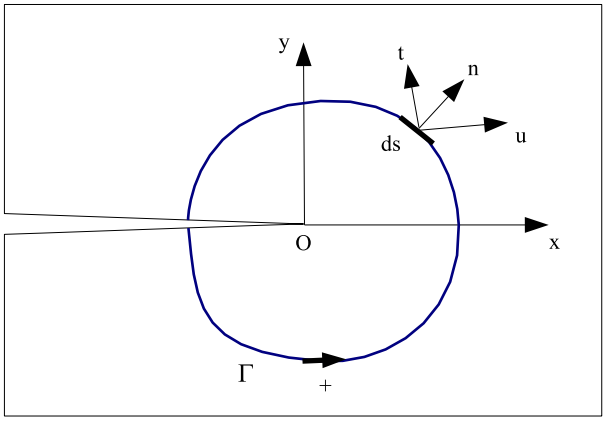


Fig. V.17 – Tuyau : Notations adoptées en pointe de fissure pour définir d'intégrale de contour, J

V.5.3 Calcul des moments statistiques de la réponse

Dans cette section, on s'intéresse au calcul des moments statistiques de l'intégrale de Rice J pour $\sigma_t = 200$ MPa, grâce aux méthodes non intrusives de projection (l'intégrale étant évaluée par quadratures et par la méthode de l'hypercube latin) et de minimisation au sens de régression (tableau V.32). Des résultats de référence pourraient être obtenus pas des méthodes de simulation lors d'un couplage mécano-fiabiliste, mais avec un nombre trop important de tirages (au minimum 10000), c'est pour cela qu'ils n'ont pas été faits. On remarque que pour la méthode de minimisation au sens de régression, la convergence est atteinte pour les quatre premiers moments à partir de 105 points dans le plan d'expériences (soit $(M-1)P$ points). On remarque également que la méthode de projection permet d'obtenir la même valeur moyenne que celle obtenue avec la méthode de minimisaiton au sens de régression et ce avec la méthode de quadratures ou celle de l'hypercube latin. Cependant, seule la méthode de quadratures permet d'obtenir la bonne valeur pour l'écart-type. La méthode de l'hypercube latin ne permet donc pas d'avoir de bons résultats avec 1500 tirages : il faudrait augmenter ce nombre, mais on perdrait alors le bénéfice de la méthode. On obtient des résultats différents pour les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement entre la méthode de projection avec les quadratures et la méthode de minimisation au sens de régression. Cette différence est peut-être due au fait que dans la méthode de projection, la présence des poids d'intégration ne donne pas la même importance à tous les calculs déterministes.

Tab. V.32 – Tuyau : Moments statistiques de J pour $\sigma_t = 200$ MPa

	Hypercube Latin			quadratures			
moment	500	1000	1500	3	4		
moyenne	71,63	71,65	71,65	71,64	71,65		
écart-type	10,11	9,82	10,74	7,84	7,84		
asymétrie	2,41	-0,49	2,26	1,23	1,23		
aplatissement	39,28	9,67	22,09	6,86	6,85		
	Régression						
	35	70	105	140	175	210	256
moyenne	51,20	66,48	71,64	71,64	71,64	71,64	71,64
écart-type	48,20	26,39	7,81	7,81	7,81	7,81	7,81
asymétrie	-2,90	-4,86	0,32	0,32	0,32	0,32	0,32
aplatissement	18,99	45,92	3,20	3,21	3,21	3,21	3,21

V.5.4 Analyse de fiabilité

Pour l'étude de fiabilité, on choisit un scénario de défaillance qui correspond à l'amorçage du défaut dans la tuyauterie, défini par le dépassement par l'intégrale J de la résistance à la déchirure $J_{0,2}$. Cette quantité est considérée comme aléatoire et modélisée par une variable lognormale de moyenne 52 MPa.mm et de coefficient de variation de 18.27%. La fonction d'état limite s'écrit :

$$g = J_{0.2} - J(E, \sigma_y, n, \alpha) \tag{5.15}$$

La solution de référence est obtenue à l'aide d'un couplage mécano-fiabiliste entre le code aux éléments finis Code_Aster® et le code fiabiliste PROBAN. L'approximation $\tilde{J} = \sum J_k \Psi_k(\underline{\xi})$ par les méthodes non intrusives permet d'évaluer la probabilité de défaillance en appliquant en premier lieu la méthode FORM puis un échantillonnage d'importance autour du point de conception (un coefficient de variation de 5% est obtenu avec 1000 simulations). Les figures V.18 et V.20 montrent respectivement les probabilités de défaillance obtenues par les méthodes de régression et de projection (par quadratures et par l'hypercube latin). Les figures et V.19 V.21 montrent respectivement les log des probabilités de défaillance obtenues par les méthodes de régression et de projection (par quadratures et par l'hypercube latin). On remarque que pour la méthode de minimisation de régression, la convergence est atteinte pour 105 points dans le plan d'expériences (*i.e.* pour $(M-1)*P$ points). Pour la méthode de projection avec la méthode des quadratures pour l'évaluation de l'intégrale, on a de bons résultats avec 3 points d'intégration. La méthode de l'hypercube latin ne donne pas satisfaction même avec 1500 tirages. Ces résultats sont confirmés par les figures en échelle log (Figures V.19 et V.21). Les probabilités de défaillance sont correctement approximées sur une plage relativement large (de 10^{-8} à 10^{-1}). Le tableau V.33 montre les facteurs d'importance associés aux différentes variables obtenues par la méthode FORM pour le couplage direct et pour la méthode non intrusive de régression (avec 105 points). On remarque que la variable qui a les plus d'importance est $J_{0,2}$, qui n'intervient pas dans la décomposition de J sur la base du chaos polynomial. Ceci est certainement du à con fort coefficient de variation. On peut donc se demander légitiment si cela ne masque une mauvaise approximation de J. Si on regarde les coefficients de variation des autres variables aléatoires, obtenues à partir de la méthode non intrusive, on remarque qu'il sont identiques à ceux obtenus par le couplage direct. On peut donc supposer que l'approximation de J dans le chaos polynomial est bonne. Le tableau V.34 montre le nombre d'appels à l'état limite pour effectuer les analyses de fiabilité. On a vu que les méthodes non intrusives convergeaient avec 105 calculs éléments finis pour la méthodes de régression et avec 3 points d'intégration (*i.e.* 81 calculs aux éléments finis) pour la méthode de projection avec les quadratures. En terme d'efficacité, la solution de référence par la méthode FORM a nécessité 542 appels au code aux éléments finis

pour 11 valeurs de σ_t, alors que les méthodes non intrusives peuvent fournir des résultats pour toutes les valeurs de σ_t souhaitées.

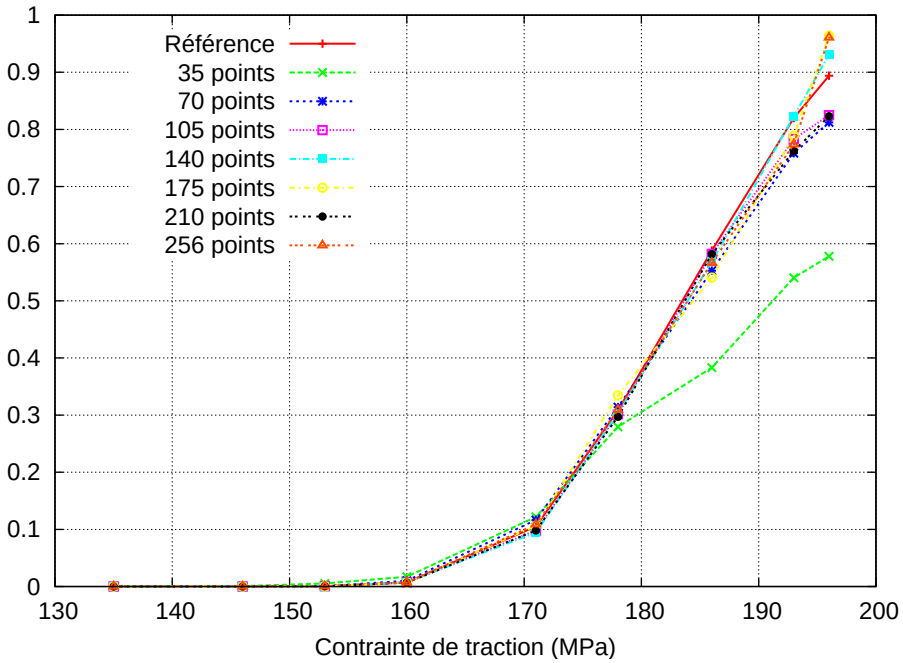


Fig. V.18 – Tuyau : Evolution de la probabilité de défaillance calculée par la méthode de régression en fonction de la contrainte de traction appliquée

Tab. V.33 – Tuyau : Facteurs d'importance associés aux différentes variables (en %) ($\sigma_t = 200$ MPa)

Variable	Couplage direct	Régression (105 points)
$J_{0,2}$	74,2	74,2
E	5,6	5,6
α	13,6	13,6
n	0,2	0,2
σ_y	6,4	6,4

V.5.5 Conclusion

Dans cette section, on a montré que les méthodes non intrusives de projection et de régression sont utilisables pour des calculs en mécanique non linéaire de la rupture. La méthode de projection a été utilisée avec la méthode de simulation de l'hypercube latin et avec les quadratures. Aussi bien pour le calcul des moments statistiques que pour les analyses de fiabilités, la méthode de l'hypercube latin donne des résultats moins précis que la méthode des quadratures quand elle les donne, et ce

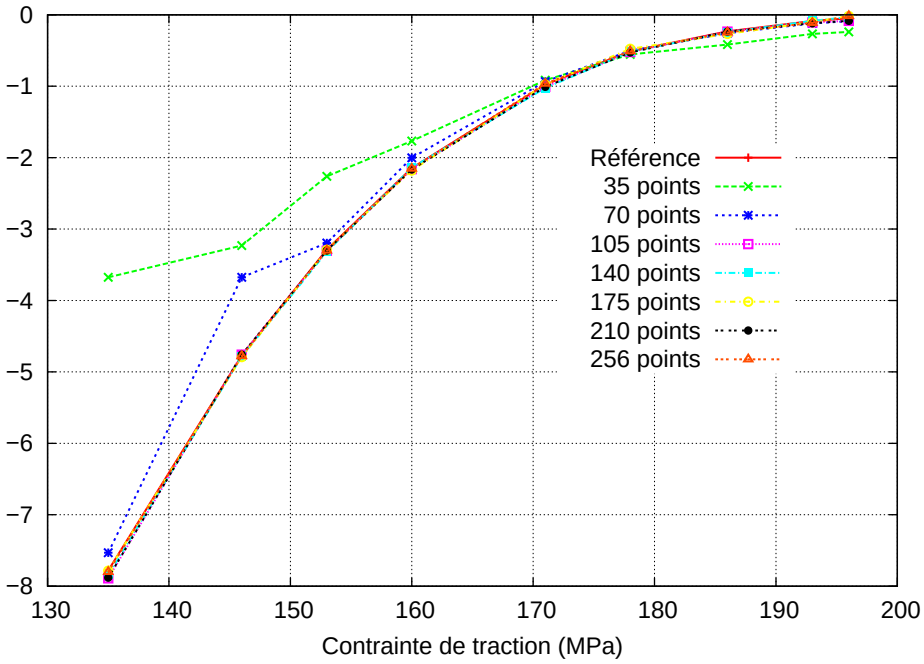


Fig. V.19 – Tuyau : Evolution du logarithme de la probabilité de défaillance calculée par la méthode de régression en fonction de la contrainte de traction appliquée

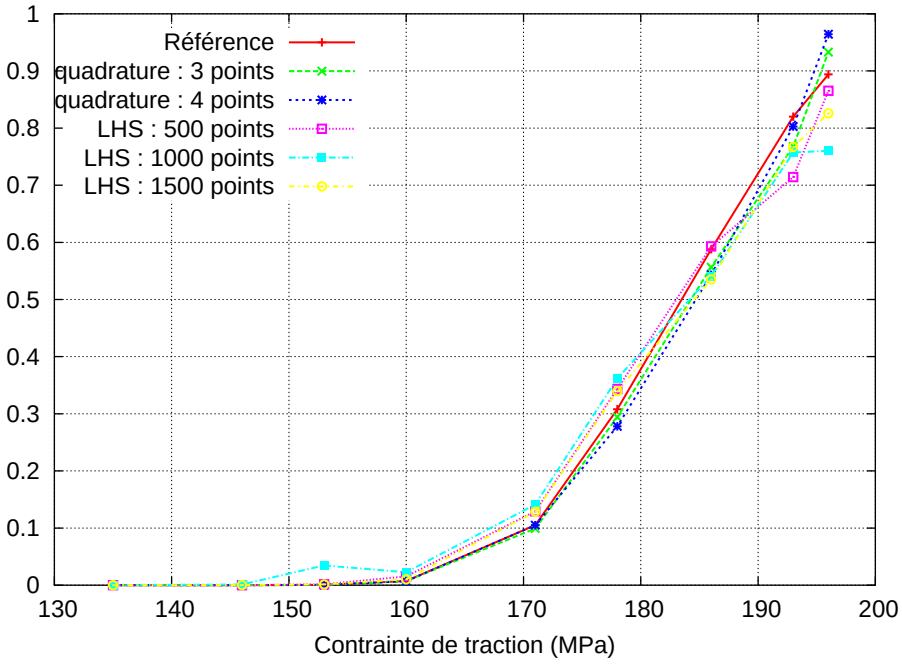


Fig. V.20 – Tuyau : Evolution de la probabilité de défaillance calculée par la méthode de projection en fonction de la contrainte de traction appliquée

avec un nombre plus élevé d'appels au code aux éléments finis. Pour les analyses de

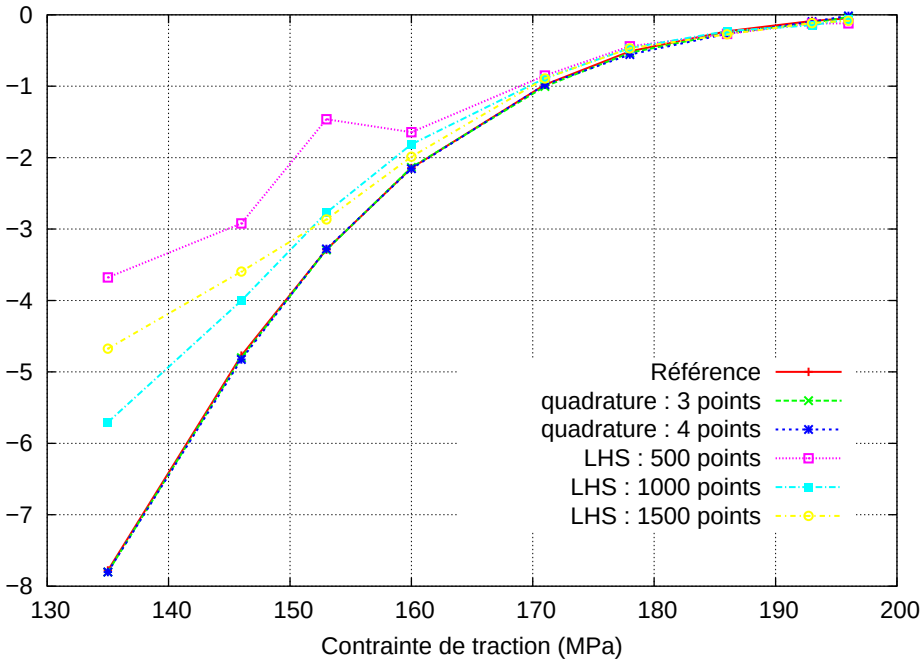


Fig. V.21 – Tuyau : Evolution du logarithme de la probabilité de défaillance calculée par la méthode de projection en fonction de la contrainte de traction appliquée

Tab. V.34 – Tuyau : Nombre d'appels à la fonction d'état limite pour le calcul de J ($\sigma_t = 200$ MPa)

Couplage	Hypercube Latin			quadratures		
direct	500	1000	1500	3	4	
542	500	1000	1500	81	256	
Régression						
35	70	105	140	175	210	256
35	70	105	140	175	210	256

fiabilité, les résultats de référence ont été obtenus par un couplage entre un code aux éléments finis et un code probabiliste. La méthode de projection avec les quadratures permet de retrouver les résultats de référence avec 3 points d'intégration, la méthode de régression avec un nombre de points supérieur à $(M-1)P$ points dans le plan d'expériences.

V.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons tout d'abord cherché à valider les méthodes non intrusives pour des cas tests en fiabilité des structures. Les méthodes non intrusives peuvent être utilisées dans le cas d'analyses de fiabilité. Un chaos polynomial d'ordre 3 est suffisant. Pour la méthode de projection avec le schéma de qadratures, 3 ou 4 points d'intégration permettent d'obtenir une bonne précision. Pour la méthode de régression, on a remarqué qu'en prenant $(M-1)P$ points dans le plan d'expériences, les résultats étaient précis. Ensuite, nous avons comparé la MEFS intrusive du chapitre III avec les méthodes non intrusives du chapitre IV sur des exemples de mécanique élastique linéaire. Les résultats de référence ont été obtenus par un couplage mécano-fiabiliste entre un code aux éléments finis et un code probabiliste. Nous avons vu que les méthodes non intrusives étaient, sur ces cas, plus précises et plus efficaces que la méthode MEFS intrusive. Enfin, nous avons utilisé les méthodes non intrusives dans un cas de mécanique non linéaire de la rupture. Cet exemple a permis de montrer que pour la méthode de projection, la méthode de quadratures est préférable à celle de l'hypercube latin, car elle est plus précise et plus efficace.
Pour l'utilisation des méthodes non intrusives, nous préconisons le choix d'un chaos polynomial d'ordre 3. Pour ce qui est de la méthode de projection, la méthode de quadratures est à préférer avec un nombre de points d'intégration égal à l'ordre du chaos (donc 3). Dans la méthode de régression, on a remarqué par expérience qu'un nombre de points égal à $(M-1)P$ (M étant le nombre de variables alétoires et P la taille du chaos) permettait d'atteindre la convergence pour le calcul des coefficients de la réponse. Ces indications sont basées sur des observations sur différents cas tests et ont toujours été vérifiées sur les exemples de ce chapitre. Nous sommes bien entendu conscient qu'un travail reste à faire pour trouver des règles précises concernant le nombre exact de calcul à faire. Pour ce qui est du choix de la méthode non intrusive (de projection ou de régression), un critère de choix est le nombre de calculs éléments finis déterministes à faire pour obtenir les bons résultats (en se basant sur les indications précédentes).

Chapitre -VI-

Conclusion - Perspectives

Depuis la prise en compte de l'aléa dans les modèles mécaniques il y a une vingtaine d'années, le mariage éléments finis - probabilités a beaucoup évolué. Les premières méthodes étaient de simples méthodes de simulation, qui nécessitent un grand nombre d'appel au code aux éléments finis. Afin d'en réduire le nombre, les méthodes d'approximation ont d'abord été développées. Aux débuts des années 1990, la méthode des éléments finis stochastiques spectraux (MEFSS) développée par Ghanem permettait de prendre en compte l'aléa sur un paramètre matériau sous la forme d'un champ aléatoire. La réponse stochastique du système est son développement dans une base de l'espace de Hilbert appelée chaos polynomial. L'objectif principal de la thèse était de voir si cette méthode est applicable dans un cadre industriel, c'est-à-dire avec un modèle non linéaire dans lequel l'aléa est représenté par plusieurs variables aléatoires de type quelconque, et porte sur des paramètres matériaux et sur le chargement. Cette méthode devait être utilisable pour des analyses en tendance centrale (calculs des moments statistiques) et des analyses de fiabilité.

La première étape du travail a été de modifier la méthode développée par Ghanem pour pouvoir prendre en compte des variables aléatoires et non des champs aléatoires. Pour ce faire, nous avons proposé deux méthodes de discrétisation des variables aléatoires sur la base du chaos polynomial, ainsi que des estimateurs d'erreur permettant de juger la qualité des approximations. La première méthode développée, basée sur l'orthogonalité de la base, se réduit au calcul d'une intégrale par la méthode des quadratures de Gauss. La seconde méthode est une méthode de régression. Ces méthodes ont été validées sur différents types de variables aléatoires et sur des fonctions de variables aléatoires.

Comme les variables aléatoires d'entrée peuvent représenter l'aléa sur différents types de paramètres (module d'Young, coefficient de Poisson, paramètres de chargement, etc.), nous avons proposé des modifications dans la MEFSS pour pouvoir faire intervenir ces variables aléatoires dans le cadre de la mécanique élastique linéaire. Cette nouvelle formulation est baptisée méthode des éléments finis stochastiques (MEFS)

Une fois le développement de la réponse dans le chaos polynomial obtenue, nous avons montré que différents post-traitements sont disponibles : le calcul des moments statistiques de la réponse ; le tracé de la densité de probabilité de la réponse ; des analyses de fiabilité, qui se font sur une expression analytique de l'état limite (les méthodes classiques de fiabilité se font donc à moindre coût).

Cette nouvelle formulation a été validée sur un exemple d'application concernant le tassement d'une fondation, dans lequel le module d'Young du sol ainsi que la pression appliquée sur ce sol sont représentés par des variables aléatoires. Les résultats, autant pour le calcul des moments statistiques que pour les analyses de

fiabilité, montrent que la MEFS est utilisable en mécanique élastique linéaire et que les résultats sont aussi précis que les méthodes classiques de mécanique probabiliste (couplage mécano-fiabiliste). Un chaos polynomial d'ordre 3 est généralement suffisant pour obtenir une bonne précision. Pour augmenter l'efficacité de la méthode, mais en perdant un peu de précision, on peut utiliser une méthode de résolution hiérarchique.

La MEFS nécessite des modifications de l'équation d'équilibre pour pouvoir prendre en compte l'aléa. La grande majorité des cas industriels comportent des non linéarités, la MEFS devient alors difficile à mettre en œuvre. Les méthodes non intrusives proposées ici permettent de résoudre ce problème. Nous avons vu que la réponse peut se décomposer en une série tronquée dans la base du chaos. Les deux méthodes non intrusives proposées calculent les coefficients de ce développement directement à partir de calculs aux éléments finis déterministes.
La première de ces méthodes, baptisée méthode de projection, utilise l'orthogonalité de la base du chaos polynomial. Elle nécessite le calcul d'une intégrale multidimensionnelle, qui peut être fait soit par des méthodes de simulation, soit par un schéma de quadratures de Gauss. Si cette intégrale est calculée par quadratures, il faut K^M calculs aux éléments finis pour pouvoir déterminer l'ensemble des coefficients (où M désigne le nombre de variables aléatoires et K le nombre de points d'intégration).
La seconde méthode proposée est une méthode de régression basée sur une minimisation au sens des moindres carrés de l'erreur entre la réponse exacte, obtenue par calcul aux éléments finis stochastiques, et la solution approchée (obtenue par une évaluation du développement de la réponse dans le chaos polynomial) et ce pour un ensemble de points définissant un plan d'expériences. Une méthode de choix des points constituant le plan d'expériences est fournie. Elle est basée sur une combinaison entre les racines des polynômes d'Hermite uni-dimensionnel d'ordre $p+1$ (p étant l'ordre du chaos polynomial). Afin de réduire au maximum la taille du plan d'expérience, des analyses paramétriques ont été menées pour quantifier le nombre de points à garder. Il semble d'après les exemples du chapitre V, que $(M-1)P$ points (où P est la taille du chaos polynomial) est le nombre de points à partir duquel les résultats obtenus sont optimaux entre précision et efficacité. Cette méthode est analogue avec la méthode de surface de réponse utilisée en fiabilité des structures. Néanmoins elle diffère par le choix de la base de développement, mais surtout un choix des points du plan d'expérience est donné dans la méthode de régression.

Les méthodes non intrusives ont été validées sur des cas tests de fiabilité dans le chapitre V. Un ordre de chaos polynomial de 3 est suffisant. Pour la

méthode de projection utilisée avec un schéma de quadratures, trois points d'intégration suffisent pour obtenir les bonnes valeurs de référence. Pour la méthode de régression, la règle empirique de $(M-1)P$ points a été vérifiée sur tous les cas testés.

Les méthodes non intrusives ont été comparées à la MEFS sur deux exemples de mécanique élastique linéaire (le tassement d'une fondation et la convergence d'un tunnel). Des résultats de référence ont été obtenus par un couplage mécano-fiabiliste. Les résultats montrent que les méthodes non intrusives sont plus précises et plus efficaces que la MEFS et ce à la fois pour les moments statistiques et pour les analyses de fiabilité.

Les méthodes non intrusives ont enfin été utilisées dans un cas de mécanique de la rupture non linéaire (rupture d'un tuyau fissuré). Le calcul des moments statistiques de la réponse ont permis de s'assurer la convergence des méthodes de projection (vis-à-vis du nombre de points d'intégration) et de régression (vis-à-vis de la taille du plan d'expériences). Trois points d'intégration dans le schéma de quadratures suffisent et la règle empirique de $(M-1)P$ points dans le plan d'expériences de la méthode de régression est une nouvelle fois vérifiée. Les résultats de référence pour les analyses de fiabilité ont été obtenus par un couplage mécano-fiabiliste. Dans la méthode de projection, une méthode de simulation (l'hypercube latin) a été testée pour évaluée les coefficients. Elle ne donne pas de bons résultats, même avec un nombre 6 fois plus important de calculs aux éléments finis déterministes que pour une intégration par un schéma de quadratures à 3 points. Les méthodes non intrusives (projection avec quadratures, et régression) donnent de bons résultats avec un coût nettement moindre qu'un couplage mécano-probabiliste classique.

Ces exemples d'application montrent que les méthodes non intrusives des éléments finis stochastiques sont utilisables dans un cadre industriel pour résoudre des problèmes mécaniques dans lesquels l'aléa est représenté par des variables aléatoires portant sur des paramètres matériau ou sur le chargement. Cependant, il reste un travail important à faire pour pouvoir utiliser ces méthodes de manière optimale.

En effet, pour le calcul de l'intégrale dans la méthode de projection, il est possible d'utiliser des schémas de quadratures adaptés qui permettent de diminuer le nombre d'appels à la fonction à intégrer. Ces schémas appelés " cubatures " (cf. [Smo63]) ont été testés dans [Kee04, LRN+02]. Pour la méthode de régression, il n'existe pour l'instant qu'une règle empirique pour le choix de la taille du plan d'expériences. Il pourrait être bon d'utiliser toute la théorie des plans d'expérience afin de déterminer la taille optimale du plan.

Etant donné que les méthodes non intrusives ne requièrent que des calculs aux éléments finis déterministes, il pourrait être intéressant de distribuer ces calculs afin d'augmenter l'efficacité de ces méthodes. Afin de s'assurer de la précision des résultats en l'absence de résultats de référence, il faudrait se munir d'estimateurs

d'erreur.

Enfin, on peut toujours utiliser un chaos polynomial généralisé [XK02] dans des cas spécifiques : si toutes les variables aléatoires d'entrée sont uniformes, il peut être intéressant d'utiliser un chaos polynomial basé sur les polynômes de Legendre et non plus sur les polynômes d'Hermite. Enfin, la sensibilité de la réponse vis-à-vis des coefficients du développement de la réponse peut peut-être permettre d'estimer des facteurs d'importance des variables aléatoires d'entrée à partir des dérivées du développement par rapport aux variables gaussiennes centrées réduites.

Liste des tableaux

II.1 Exemple de chaos polynomial pour $M = 3$ et $p = 3$ 12
II.2 Nombres de polynômes P dans la base du chaos. (M est le nombre de variables aléatoires de la base, p le degré maximal) 13

III.1 Schémas d'intégration pour les quadratures de Gauss jusqu'à l'ordre 4 29
III.2 Coefficients a_i calculés par les deux méthodes d'approximation dans le cas d'une loi lognormale 32
III.3 Moments calculés à partir des coefficients a_i par les deux méthodes d'approximation dans le cas d'une loi lognormale 32
III.4 Coefficients a_i calculés par les deux méthodes d'approximation dans le cas d'une loi de Weibull 33
III.5 Moments calculés à partir des coefficients a_i par les deux méthodes d'approximation dans le cas d'une loi de Weibull 34
III.6 Coefficients a_i calculés par les deux méthodes d'approximation dans le cas d'une loi Gamma 35
III.7 Moments calculés à partir des coefficients a_i par les deux méthodes d'approximation dans le cas d'une loi Gamma 35
III.8 Coefficients a_i calculés par la méthode de régression dans le cas d'une loi uniforme sur $[1; 2]$ 38
III.9 Moments calculés à partir des coefficients a_i par les deux méthodes d'approximation dans le cas d'une loi uniforme 38
III.10 Coefficients a_i calculés par la méthode de régression dans le cas d'une loi Beta $(0; 0,5; 1, 1; 1, 1)$ 39
III.11 Moments calculés à partir des coefficients a_i par les deux méthodes d'approximation dans le cas d'une loi Beta 40
III.12 Erreur sur l'écart-type (%) 42
III.13 Erreur relative sur les quatre premiers moments statistiques (%) . . 43
III.14 Erreur sur la fonction de répartition : $\varepsilon_{CDF} = \mathrm{Max}|F_X(x) - F_{\tilde{X}}(x)|$ 44
III.15 Coefficients x_i^j avant repositionnement 48
III.16 Coefficients x_i^j après repositionnement 48
III.17 Paramètres du modèle déterministe de la fondation. 62

III.18 Fondation homogène : Comparaison des 4 premiers moments statistiques du déplacement maximal 63
III.19 Fondation homogène : Temps de calcul 64
III.20 Fondation homogène : Indice de fiabilité β 64
III.21 Fondation homogène : Indice de fiabilité β calculé par Importance Sampling 66

IV.1 Nombre d'appels à la fonction S en fonction du nombre de variables aléatoires et de l'ordre du chaos polynomial 75
IV.2 Nombre des combinaisons possibles des racines pour les points de collocation 78

V.1 Définition des cas tests analytiques [Waa00] 96
V.2 Définition des critères 96
V.3 Cas test 1 : Définition des variables aléatoires 97
V.4 Cas test 1 : Indice de fiabilité associé à la fonction d'état limite 5.1 obtenus avec les méthodes classiques de fiabilité 97
V.5 Cas test 1 : Coordonnées du point de conception obtenues par la méthode FORM 98
V.6 Cas test 1 : Indice de fiabilité associé à la fonction d'état limite $\tilde{g}_1$ (obtenu par les méthodes non intrusives) obtenu avec la méthode du tirage d'importances 99
V.7 Cas test 2 : Définition des variables aléatoires 99
V.8 Cas test 2 : Indice de fiabilité associé à la fonction d'état limite 5.2 . 100
V.9 Cas test 3 : Définition des variables aléatoires 101
V.10 Cas test 3 : Valeurs des coefficients du développement de g_3 sur le chaos polynomial 102
V.11 Cas test 4 : Définition des variables aléatoires 102
V.12 Cas test 4 : Valeurs des coefficients du développement de g_4 sur le chaos polynomial 103
V.13 Cas test 5 : Définition des variables aléatoires 103
V.14 Cas test 5 : Valeurs des coefficients du développement de g sur le chaos polynomial 104
V.15 Cas test 6 : Définition des variables aléatoires 105
V.16 Cas test 6 : Indice de fiabilité associé à la fonction d'état limite 5.6 . 106
V.17 Cas test 7 : Définition des variables aléatoires 106
V.18 Cas test 7 : Indice de fiabilité associé à la fonction d'état limite 5.7 . 107
V.19 Paramètres du modèle déterministe de la fondation 108
V.20 Définition des variables aléatoires de la fondation 108
V.21 Fondation : Moments statistiques du déplacement maximal 110
V.22 Fondation : Probabilité de défaillance P_f 112

V.23 Fondation : Temps de calcul 114
V.24 Paramètres du modèle déterministe du tunnel 115
V.25 Paramètres aléatoires du modèle du tunnel 117
V.26 Tunnel : Moments statistiques du déplacement maximal 118
V.27 Tunnel : Indice de fiabilité β pour différentes valeurs du seuil u_S . . 119
V.28 Tunnel : Erreur entre la solution exacte et la solution approchée en chacun des points du plan d'expériences 120
V.29 Tunnel : Temps de calcul 121
V.30 Paramètres déterministes du modèle du tuyau 123
V.31 Description des variables aléatoires d'entrée 125
V.32 Tuyau : Moments statistiques de J pour $\sigma_t = 200$ MPa 126
V.33 Tuyau : Facteurs d'importance associés aux différentes variables (en %) ($\sigma_t = 200$ MPa) 128
V.34 Tuyau : Nombre d'appels à la fonction d'état limite pour le calcul de J ($\sigma_t = 200$ MPa) 130

Table des figures

II.1 Projection sur l'espace d'Hilbert de l'équation d'équilibre 17
II.2 Allure de la matrice de rigidité $\mathcal{K}$ 19
II.3 Schéma bilan du chapitre 2 : Différentes étapes de la méthode des éléments finis stochastiques spectraux 22

III.1 Densités de probabilité théorique et approchées à l'ordre 3 pour la loi lognormale 33
III.2 Densités de probabilité théorique et approchées à l'ordre 3 pour la loi de Weibull 34
III.3 Densités de probabilité théorique et approchées à l'ordre 4 pour la loi de Weibull 35
III.4 Densités de probabilité théorique et approchées à l'ordre 3 pour la loi Gamma 36
III.5 Densités de probabilité théorique et approchées à l'ordre 4 pour la loi Gamma 37
III.6 Densités de probabilité théorique et approchées à l'ordre 3 pour la loi uniforme par les méthodes de projection et de régression 39
III.7 Densités de probabilité théorique et approchées à l'ordre 4 pour la loi uniforme par les méthodes de projection et de régression 40
III.8 Densités de probabilité théorique et approchées pour la loi Beta (méthode de régression) 41
III.9 Zones d'intérêt pour le calcul des moments statistiques et les analyses de fiabilité 56
III.10 Post-traitements disponibles avce le développement de la réponse sur le chaos polynomial 61
III.11 Schéma de la fondation et maillage associé 62
III.12 Fondation homogène : Densités de probabilité du tassement maximal (en m) obtenues par la MEFS à différents ordres 66
III.13 Fondation homogène : Densités de probabilité du tassement maximal (en m) obtenues par la MEFS : zoom autour de la moyenne 67
III.14 Fondation homogène : Logarithme des densités de probabilité du tassement maximal (en m) obtenues par la MEFS 67

III.15 Fondation homogène : Déformation moyenne ε^0_{yy} de la fondation à l'ordre 4 68
III.16 Fondation homogène : Ecart-type de la déformation ε^0_{yy} de la fondation à l'ordre 4 68
III.17 Schéma bilan du chapitre 3 sur les méthodes non intrusives 70

IV.1 Intégration par la méthode de Monte Carlo 73
IV.2 Principe de la méthode de collocation 77
IV.3 Problèmes avec la méthode de collocation 78
IV.4 Principe de la méthode de surface de réponse 80
IV.5 Mise en œuvre de la méthode non intrusive de projection 87
IV.6 Mise en œuvre de la méthode non intrusive de régression 89
IV.7 Schéma bilan du chapitre 4 sur les méthodes non intrusives 91

V.1 Cas test 2 : état limite 100
V.2 Cas test 3 : état limite 101
V.3 Cas test 4 : état limite 103
V.4 Cas test 5 : état limite 104
V.5 Schéma de la fondation et maillage associé 108
V.6 Evolution des moments obtenus en fonction du nombre de simulations de Monte Carlo 110
V.7 Evolution des moments en fonction du nombre de points du plan d'expériences dans la méthode de régression 111
V.8 Evolution des probabilités de défaillance normées par la valeur de référence en fonction du nombre de points du plan d'expériences dans la méthode de régression 113
V.9 Evolution des indices de fiabilité normés par la valeur de référence en fonction du nombre de points du plan d'expériences dans la méthode de régression 113
V.10 Convergence d'un tunnel non soutenu dans un massif élastique . . . 116
V.11 Maillage d'un quart de tunnel 116
V.12 Tunnel : Erreur entre la solution exacte et la solution approchée en chacun des points du plan d'expériences 121
V.13 Tunnel : Histogramme de l'erreur entre la solution exacte et le développement polynomial (256 points) 122
V.14 Schéma du tuyau 124
V.15 Tuyau : Courbe de traction du matériau 124
V.16 Maillage de la tuyauterie fissurée 124
V.17 Tuyau : Notations adoptées en pointe de fissure pour définir d'intégrale de contour, J 125

V.18 Tuyau : Evolution de la probabilité de défaillance calculée par la méthode de régression en fonction de la contrainte de traction appliquée 128
V.19 Tuyau : Evolution du logarithme de la probabilité de défaillance calculée par la méthode de régression en fonction de la contrainte de traction appliquée 129
V.20 Tuyau : Evolution de la probabilité de défaillance calculée par la méthode de projection en fonction de la contrainte de traction appliquée 129
V.21 Tuyau : Evolution du logarithme de la probabilité de défaillance calculée par la méthode de projection en fonction de la contrainte de traction appliquée 130

A.1 Correspondance entre un tirage de boules et la séquence d'entiers $\boldsymbol{\alpha}$ pour $(M = 4, p = 2)$ 157
A.2 Génération récursive du chaos polynomial $(M = 4, p = 2)$ 157

B.1 Principe de l'hypercube latin 162
B.2 Répartition de 100 tirages pour différentes méthodes de simulation . 163

C.1 Principe de l'approximation FORM ([Lem05]) 167
C.2 Calcul d'une probabilité de défaillance par simulation de Monte Carlo 168
C.3 Principe du tirage d'importance 169

Bibliographie

[AH99] M. Anders and M. Hori. Stochastic finite element method for elasto-plastic body. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 46(11) :1897–1916, 1999.

[AH01] M. Anders and M. Hori. Three-dimensional stochastic finite element method for elasto-plastic body. *Int. J. Numer. Met. Engng.*, 51 :449–478, 2001.

[BC02] I. Babuska and P. Chatzipantelidis. On solving elliptic stochastic partial differential equations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 191 :4093–4122, 2002.

[BC04] C. Blanzé and L. Champaney. A computational strategy for the random response of assemblies of structures. *Int. J. Sol. Struc.*, 41 :6383–6405, 2004.

[BS03] M. Berveiller and B. Sudret. Thèse sur les éléments finis stochastiques. Rapport d'avancement n^{o}1. Technical Report Note HT-26/03/039/A, 2003.

[BSL04a] M. Berveiller, B. Sudret, and M. Lemaire. Comparison of methods for computing the response coefficients in stochastic finite element analysis. In *Proc. AsRANET 2, Barcelona, Spain*, 2004.

[BSL04b] M. Berveiller, B. Sudret, and M. Lemaire. Presentation of two methods for computing the response coefficients in stochastic finite element analysis. In *Proc. 9th ASCE specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability, Albuquerque, USA*, 2004.

[BSL05a] M. Berveiller, B. Sudret, and M. Lemaire. Non linear non intrusive stochastic finite element method - application to a fracture mechanics problem. In *Proc. 9th Int. Conf. Struct. Safety and Reliability (ICOSSAR'2005), Rome, Italie*, 2005.

[BSL05b] M. Berveiller, B. Sudret, and M. Lemaire. Nouvelle méthode de résolution pour des analyses aux éléments finis stochastiques en mécanique non linéaire. In *Proc. 17ème Congrès Français de Mécanique (CFM17), Troyes*, 2005.

[BSL05c] M. Berveiller, B. Sudret, and M. Lemaire. Structural reliability using non-intrusive stochastic finite elements. In *Proc 12th IFIP WG7.5 Conference, Aalborg, Danemark*, 2005.

[CGC04] S.K. Choi, R.V Grandhi, and R.A. Canfield. Structural reliability under non-gaussian stochastic behavior. *Computers and Structures*, 82 :1113–1121, 2004.

[CGCP04] S.K. Choi, R.V Grandhi, R.A. Canfield, and C.L. Pettit. Polynomial chaos expansion with latin hypercube sampling for estimating response variability. *AIAA Journal*, 45 :1191–1198, 2004.

[CLG03] D. Clouteau, R Lafargue, and R. Ghanem. An iterative solver for stochastic soil-structure interaction. In P.D Spanos and G. Deodatis, editors, *Computational Stochastic Mechanics (CSM-4)*, pages 119–124, 2003.

[DBO01] M. Deb, I. Babuska, and J. Oden. Solution of stochastic partial differential equations using galerkin finite element techniques. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 190 :6359–6372, 2001.

[Det00] Det Norske Veritas. *PROBAN user's manual, V.4.3*, 2000.

[DK88] A. Der Kiureghian and J-B Ke. The stochastic finite element method in structural reliability. *Prob. Eng. Mech.*, 3(2) :83–91, 1988.

[DM96] O. Ditlevsen and H.O Madsen. *Structural reliability methods*. J. Wiley and Sons, Chichester, 1996.

[DNP+04] B. Debusschere, H. Najm, P. Pébay, O. Knio, R. Ghanem, and O. Le Maître. Numerical challenges in the use of polynomial chaos representations for stochastic processes. *J. Scientific Computing*, 26 :695–719, 2004.

[DTLJ01] O. Dessombz, F. Thouverez, J-P. Lainé, and L. Jézéquel. Calcul des valeurs et vecteurs propres d'une structure stochastique par projection sur un chaos polynomial. Calcul de fonctions de transfert stochastiques. In *5ème Colloque National en Calcul des Strucutres, Giens*, 2001.

[EEOS05] H-C. Elman, O-G. Ernst, D-P. O'Leary, and M. Stewart. Efficient iterative algorithms for the stochastic finite element with application to acoustic scattering. *Comp. Meth. Applied Mech. Eng.*, 194 :1037–1055, 2005.

[Far89] L. Faravelli. Response surface approach for reliability analysis. *J. Eng. Mech.*, 115(12) :2763–2781, 1989.

[FG04] R-V. Field and M. Grigoriu. On the accuracy of the polynomial chaos approximation. *Prob. Eng. Mech.*, 19 :68–80, 2004.

[Fie02] R.V. Field. Numerical methods to estimate the coefficients of the polynomial chaos expansion. In *Proc. 15th ASCE Engineering Mechanics Conference, New-York, USA*, 2002.

[FPZ93] D. Francois, A. Pineau, and A. Zaoui, editors. *Comportement mécanique des matériaux*. Hermes, 1993.

[FRHP00] R.V. Field, J.R. Red-Horse, and T.L. Paez. A non deterministic shock and vibration application using polynomial chaos expansion. In *Proc. 8th ASCE Specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability*, 2000.

[GB96] R-G Ghanem and V. Brzkala. Stochastic finite element analysis of randomly layered media. *J. Eng. Mech.*, 122(4) :361–369, 1996.

[GG99] A. Gille-Genest. *Utilisation des méthodes numériques probabilistes dans les applications au domaine de la fiabilité des structures*. PhD thesis, Université de Paris VI, 1999.

[GG02] D.M Ghiocel and R-G Ghanem. Stochastic finite element analysis of seismic soil-structure interaction. *J. Eng. Mech.*, 128 :66–77, 2002.

[Gha99a] R-G Ghanem. Ingredients for a general purpose stochastic finite elements implementation. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 168 :19–34, 1999.

[Gha99b] R-G Ghanem. The nonlinear gaussian spectrum of log-normal stochastic processes and variables. *J. Appl. Mech., ASME*, 66 :964–973, 1999.

[Gha99c] R-G Ghanem. Stochastic finite elements with multiple random non-Gaussian properties. *J. Eng. Mech., ASCE*, 125(1) :26–40, 1999.

[Gha00] R-G Ghanem. Iterative solution of systems of linear equations arising in the context of stochastic finite elements. *Advances in Engineering Software*, 31 :607–616, 2000.

[GK96] R-G Ghanem and R. Kruger. Numerical solution of spectral stochastic finite element systems. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 129(3) :289–303, 1996.

[GMS+04] N. Gayton, A. Mohamed, J.D. Sorensen, M. Pendola, and M. Lemaire. Calibration methods for reliability-based design codes. *Structural Safety*, 26 :91–121, 2004.

[GS91] R-G Ghanem and P-D Spanos. *Stochastic finite elements - A spectral approach*. Springer Verlag, 1991.

[IG96] Ross Ihaka and Robert Gentleman. R : A language for data analysis and graphics. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 5(3) :299–314, 1996.

[Isu99] S. S. Isukapalli. *Uncertainty Analysis of Transport-Transformation Models*. PhD thesis, The State University of New Jersey, 1999.

[Kee04] A. Keese. *A general purpose framework for stochastic finite elements*. PhD thesis, Technischen Universität Braunschweig, 2004.

[KM03] A. Keese and H. Matthies. Numerical methods and smolyak quadrature for nonlinear stochastic partial differential equations. Technical report, Technical Report, Technische Universität Braunschweig, 2003.

[KM05] A. Keese and H-G. Matthies. Hierarchical parallelisation for the solution of stochastic finite element equations. *Computer and Structures*, 83 :1033–1047, 2005.

[LD93] C-C Li and A. Der Kiureghian. Optimal discretization of random fields. *J. Eng. Mech.*, 119(6) :1136–1154, 1993.

[Lem98] M. Lemaire. Finite element and reliability : combined methods by surface response. In G-N Frantziskonis, editor, *Probamat-21st Century, Probabilities and Materials : Tests, Models and Applications for the 21st century*, pages 317–331. Kluwer Academic Publishers, 1998.

[Lem05] M. Lemaire. *Fiabilité des structures - Couplage mécano-fiabiliste statique*. Hermes, 2005.

[LKNG01] O.P. Le Maître, O. M. Knio, H. N. Najm, and R. Ghanem. A stochastic projection method for fluid flow. i. basic formulation. *J. Comp. Phys.*, 173 :481–511, 2001.

[LKNG04] O.P. Le Maître, O. M. Knio, H. N. Najm, and R.G. Ghanem. Uncertainty propagation using wiener-haar expansions. *J. Comp. Phys.*, 197 :28–57, 2004.

[LM00] M. Lemaire and A. Mohamed. Finite element and reliability : A happy marriage ? In *Reliability and Optimization of Structural Systems, Keynote Lecture at the 9th IFIP WG 7.5 Working Conference*, pages 3–14. Nowak, A. and Szerszen, M. (Eds.), 2000.

[Loe77] M. Loeve. *Probability theory*. Springer Verlag, New-York, 4 edition, 1977.

[LRN+02] O.P. Le Maître, M.T. Reagan, H. N. Najm, R.G. Ghanem, and O. M. Knio. A stochastic projection method for fluid flow. ii. random process. *J. Comp. Phys.*, 181 :9–44, 2002.

[Mal97] P Malliavin. *Stochastic Analysis*. Springer, 1997.

[Mat01] The Mathworks. *Manuel de réference du logiciel Matlab*, 2001.

[MBC79] M. D. MacKay, R. J. Beckman, and W. J. Conover. A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. *Technometrics*, 2 :239–245, 1979.

[Mel90] R-E Melchers. Radial importance sampling for structural reliability. *J. Eng. Mech.*, 116 :189–203, 1990.

[Mel99] R-E Melchers. *Structural reliability analysis and prediction*. John Wiley & Sons, 1999.

[MHR03] S. Mahadevan, S. Huang, and R. Rebba. A stochastic response surface method for random field problems. *Proc. ICASP9 "Applications of Statistics and Probability to Civil Engineering Reliability and Risk Analysis"*, 1 :177–184, 2003.

[ML96] M. Meynet and M. Lemaire. Utilisation de plans d'expériences dans l'espace normé pour la construction de surface de réponse. Technical report, LaRAMA - Institut Français de Mécanique Avancée et Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, France, 1996.

[NZ02] V. A. B. Narayanan and N. Zabaras. Uncertainty propagation in analysis and inverse-design of heat conduction processes using a spectral stochastic finite element approach. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, page xxx, 2002.

[OSD03] A. Olsson, G. Sandberg, and O. Dahlblom. On latin hypercube sampling for structural reliability analysis. *Struct. Saf.*, 25 :47–68, 2003.

[PG00] M-F. Pellissetti and R-G. Ghanem. Iterative solution of systems of linear equations arising in the context of stochastic finite elements. *Adv. Eng. Soft.*, 31 :607–616, 2000.

[Pho03] K-K. Phoon. Representation of random variables using orthogonal polynomials. pages 97–104. Der Kiureghian, and Madanat, and Pestana (Eds.), 2003.

[PMLH00] M. Pendola, A. Mohamed, M. Lemaire, and P. Hornet. Combination of finite element and reliability methods in nonlinear fracture mechanics. *Reliability Engineering & System Safety*, 70(1) :15–27, 2000.

[PPS02] B. Puig, F. Poirion, and C. Soize. Non-Gaussian simulation using Hermite polynomial expansion : convergences. *Prob. Eng. Mech.*, 17 :253–264, 2002.

[PVTF01] W-H Press, W-T Vetterling, S-A Teukolsky, and B-P Flannery. *Numerical Recipes*. Cambridge University Press, 2001.

[Rac01] R. Rackwitz. Reliability analysis - a review and some perspectives. *Structural Safety*, 23 :365–395, 2001.

[Rad91] J.C. Radix. *Pratique moderne des probabilités*. Lavoisier, 1991.

[RE93] M-R Rajashekhar and B-R Ellingwood. A new look at the response surface approach for reliability analysis. *Structural Safety*, 12(205-220), 1993.

[Rub81] R-Y Rubinstein. *Simulation and the Monte Carlo methods*. John Wiley & Sons, 1981.

[Sap90] G. Saporta. *Probabilités, analyse des données et statistique*. Editions Technip, 1990.

[SBL03a] B. Sudret, M. Berveiller, and M. Lemaire. Application of a stochastic finite element procedure to reliability analysis. In *Proc 11th IFIP WG7.5 Conference, Banff, Canada*, 2003.

[SBL03b] B. Sudret, M. Berveiller, and M. Lemaire. Eléments finis stochastiques spectraux, nouvelles perspectives. In *Proc. 16ème Congrès Français de Mécanique - Nice*, 2003.

[SBL04] B. Sudret, M. Berveiller, and M. Lemaire. Eléments finis stochastiques en élasticité linéaire. *C. R. Mécanique*, 332 :531–537, 2004.

[SBL05] B. Sudret, M. Berveiller, and M. Lemaire. A stochastic finite element procedure for moment and reliabiltiy analysis. *Rev. Eur. El. Finis*, 2005. soumis pour publication.

[Sch97] Schuëller, G. (Editor). A state-of-the-art report on computational stochastic mechanics. *Prob. Eng. Mech.*, 12(4), 1997. IASSAR report.

[Sch01] Schuëller, G.I. . Computational stochastic mechanics - recent advances. *Comp. Struct.*, 79 :2225–2234, 2001.

[SD00] B. Sudret and A. Der Kiureghian. Stochastic finite elements and reliability : A state-of-the-art report. Technical Report n^o UCB/SEMM-2000/08, University of California, Berkeley, 2000. 173 pages.

[Smo63] S.A. Smolyak. Quadrature and interpolation formulas for tensor products of certain classes of functions. *Soviet. Math. Dokl.*, 4 :240–243, 1963.

[Sud05] B. Sudret. Des éléments finis stochastiques spectraux aux surfaces de réponse stochastiques : une approche unifiée. In *Proc. 17ème Congrès Français de Mécanique (CFM17), Troyes*, 2005.

[SY88] M. Shinozuka and F. Yamazaki. Stochastic finite element analysis : an introduction. In *Stochastic Structural Dynamics, Progress in Theory and Applications*, pages 241–291. Elsevier Applied Science, 1988.

[TCMT56] M.J. Turner, R.W. Clough, H.C. Martin, and L.J. Topp. Stiffness et deflection analysis of complex strucutres. *J. Aero. Sci.*, 23(9) :805–823, 1956.

[TPPM97] M.A. Tatang, W. Pan, R.G. Prinn, and G.J. McRae. An efficient method for parametric uncertainty analysis of numerical geophysical models. *Journal of Geophysical Research*, 102 :21925–21932, 1997.

[Van03] Benoit Van Den Nieuwenhof. *Stochastic Finite Elements for elastodynamics : random fields and shape uncertainty modeling using*

direct and modal perturbation-based aproaches. PhD thesis, Université Catholique de Louvain, 2003.

[Waa00] P-H Waarts. *Structural Reliability using Finite Element Methods : an appraisal of DARS : Directional Adaptive Response Surface Sampling*. PhD thesis, TUDelft, Netherlands, 2000.

[WTM96] M. Webster, M.A. Tatang, and G.J. McRae. Application of the probabilistic collocation method for an uncertainty analysis of a simple ocean model. Technical report, MIT Joint Program on the Science and Policy of Global Change Reports Series No. 4, Massachusetts Institute of Technology, 1996.

[XK02] D. Xiu and G. E. Karniadakis. The Wiener-Askey polynomial chaos for stochastic differentiel equations. *J. Sci. Comput.*, 24(2) :619–644, 2002.

[Yu03] Y. Yu. Coupling a stochastic finite element solver with ansys and visualization of the results. Technical Report Matr.-Nr. : 2663324, Institute of scientific Computing. Technische Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig, 2003.

[ZT00] O-C Zienkiewicz and R-L Taylor. *The finite element method*. Butterworth Heinemann, 5^{th} edition, 2000.

Annexe -A-

Implémentation du chaos polynomial

L'implémentation du chaos polynomial [SD00] requiert :

- le calcul et le stockage des polynômes d'Hermite unidimensionnels
- la génération de toutes les listes $\boldsymbol{\alpha}$, dont le degré est inférieur ou égal à p. Ces listes sont numérotées de 0 à $P-1$ et les polynômes simplement notés $\{\Psi_j, j = 0, \cdots, P-1\}$

Pour chaque degré $q = \{0, \cdots, p-1\}$, l'objectif est de calculer toutes les listes de M entiers compris entre 0 et q dont la somme est égale à q. Ce problème est équivalent à celui de remplir $(M+q-1)$ cases avec $(M-1)$ boules (figure A.1). La correspondance entre la séquence d'entiers et le remplissage des cases est la suivante :

- pour chaque entier α_i de la séquence, on laisse α_i cases vides et on place une boule dans la case suivante ;
- réciproquement, pour chaque positionnement de boules, chaque entier α_i de la séquence est égal au nombre de cases vides (y compris 0) entre deux boules consécutives.

De cette équivalence, le nombre de listes $\boldsymbol{\alpha}$ de degré $\partial_\alpha = q$ est le nombre de séquences de boules correspondantes : c'est le coefficient binomial $\begin{pmatrix} M+q-1 \\ M-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M+q-1 \\ q \end{pmatrix}$.

L'algorithme permettant de générer tous les remplissages possibles de $(M+q-1)$ cases avec $(M-1)$ boules dans le cas $(q = 2, M = 4)$ est décrit la figure A.2. A noter que seuls les polynômes d'ordre 2 sont représentés.

- Pour un q donné, la position initiale est celle où les boules se trouvent dans les $(M-1)$ premières cases, ce qui correspond à la liste $\boldsymbol{\alpha} = \{0, \cdots, 0, q\}$.
- A partir d'un tirage de boules, le suivant est obtenu de manière récursive en déplaçant la boule la plus à droite d'une case à droite. Si ce n'est pas possible (*i.e.* la boule est déjà dans la position la plus à droite), alors on cherche la boule la plus à droite qui peut être déplacée d'une case vers la droite. Cette boule est déplacée, et toutes les boules se trouvant à sa droite sont ramenées à la case se trouvant à leur gauche.

En pratque, pour chaque degré q, on inverse l'ordre de la séquence de polynômes fournie par l'algorithme précédent, de façon à retomber sur le même ordre $\{\Psi_j, j = 0, \cdots, P-1\}$ que celui initialement obtenu par Ghanem et Spanos à l'aide d'outils de calcul formel.

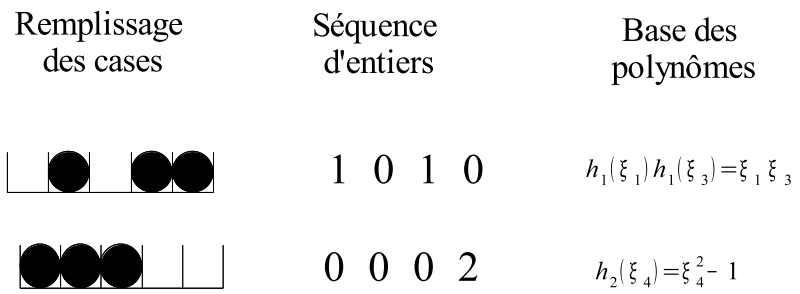


Fig. A.1 – Correspondance entre un tirage de boules et la séquence d'entiers $\boldsymbol{\alpha}$ pour $(M=4, p=2)$

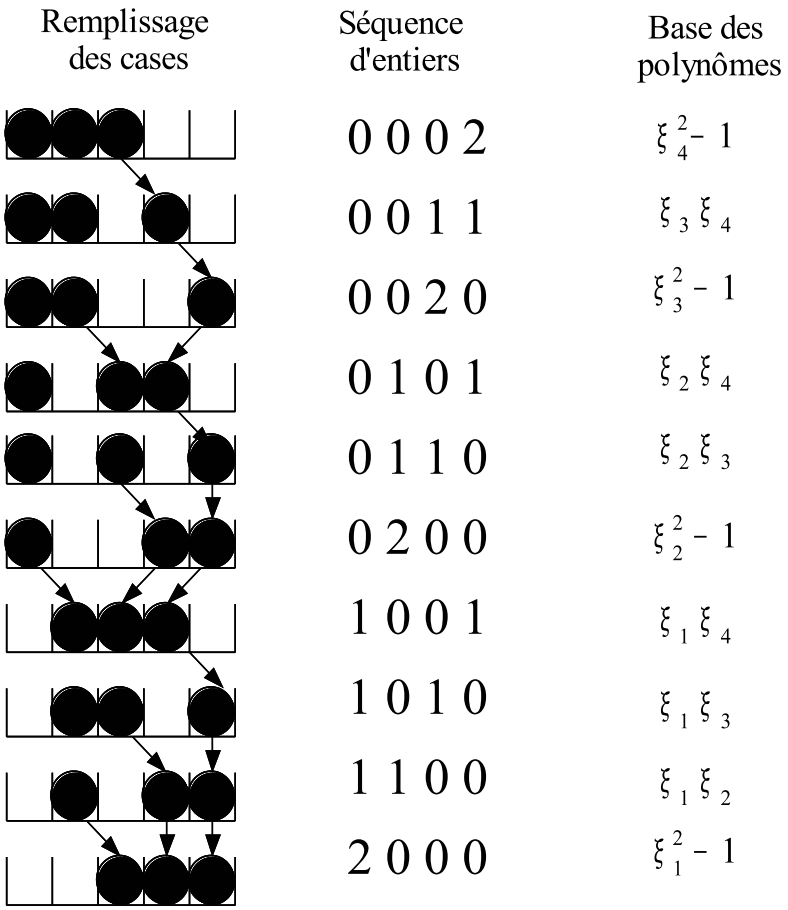


Fig. A.2 – Génération récursive du chaos polynomial $(M=4, p=2)$

Annexe -B-

Méthodes de simulation

B.1 Méthode de simulation de Monte Carlo

La simulation de Monte Carlo directe [Rub81, Mel99, GG99] est la technique la plus simple pour estimer une espérance ou une intégrale mathématique. Elle est basée sur l'application de la *loi des grands nombres*. On cherche à estimer la quantité suivante :

$$I = \int_{\mathcal{D}} G(\underline{x}) f_{\underline{X}}(\underline{x}) dx_1 \cdots dx_M \tag{2.1}$$

où G est une fonction quelconque à valeurs réelles et $\underline{X} = (X_1, \cdots, X_M)$ un vecteur aléatoire de dimension M, de densité conjointe $f_{\underline{X}}(\underline{x})$ et $\mathcal{D}$ le domaine d'intégration. En notant $\mathrm{E}[\cdot]$ l'espérance mathématique, l'intégrale précédente s'écrit :

$$I = \mathrm{E}[1_{\mathcal{D}}(\underline{X}) g(\underline{X})] \tag{2.2}$$

où $1_{\mathcal{D}}(\underline{X})$ est la fonction caractéristique de $\mathcal{D}$ valant 1 si $\underline{X} \in \mathcal{D}$ et 0 sinon. Le principe de la simulation est basé sur l'application de la loi des grands nombres : la moyenne de réalisations indépendantes converge *presque sûrement* vers l'espérance mathématique. Un **estimateur Θ_N sans biais** de I avec N tirages $\{\underline{X}^{(1)}, \cdots, \underline{X}^{(N)}\}$ est défini par :

$$\Theta_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} 1_{\mathcal{D}}(\underline{X}^{(i)}) G(\underline{X}^{(i)}) \tag{2.3}$$

Cet estimateur est sans biais : sa moyenne vaut $\mathrm{E}[G(\underline{X})]$ Sa variance est donnée par :

$$\tilde{\sigma}_N^2 = \frac{1}{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} 1_{\mathcal{D}}(\underline{X}^{(i)}) G(\underline{X}^{(i)})^2 - \Theta_N^2 \right] \tag{2.4}$$

La variance tend vers 0 lorsque le nombre de tirages N tend vers l'infini (convergence en $\sqrt{n}$), ce qui signifie que la précision sur l'estimateur augmente avec le nombre de simulations réalisées. On peut calculer au fur et à mesure de la simulation son coefficient de variation :

$$CV = \frac{\tilde{\sigma}_N}{\Theta_N} \tag{2.5}$$

Un coefficient de variation de 5% est en général visé.

B.2 Méthode de simulation stratifiée

La méthode de stratification [Rub81] consiste à diviser le domaine d'intégration en plusieurs sous-domaines disjoints (les strates) et à estimer le paramètre sur chacun d'eux. L'estimateur final est obtenu en recomposant les différents estimateurs intermédiaires. Cette méthode permet de faire varier le nombre de tirages en fonction des zones de l'espace. Ceci permet de s'assurer que l'on a des tirages situés dans les

queues de distribution.
Le domaine d'intégration $\mathcal{D}$ est découpé en K strates disjointes $\mathcal{D}_i$:

$$\mathcal{D} = \bigcup_{i=1}^{K} \mathcal{D}_i \qquad \mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j = \emptyset \quad \text{pour } i \neq j \tag{2.6}$$

On définit le poids de la strate i par $P_i = \int_{\mathcal{D}_i} f_{\underline{X}}(\underline{x}) d\underline{x}$. La fonction $1_{\mathcal{D}_i} \frac{f_{\underline{X}}(\underline{x})}{P_i}$ est alors une densité de probabilité définie sur le domaine $\mathcal{D}_i$. La décomposition de I sur les strates s'écrit :

$$I = \sum_{i=1}^{K} \int_{\mathcal{D}_i} G(\underline{x}) f_{\underline{X}}(\underline{x}) d\underline{x} = \sum_{i=1}^{K} P_i \int_{\mathcal{D}_i} G(\underline{x}) \frac{f_{\underline{X}}(\underline{x})}{P_i} = \sum_{i=1}^{K} P_i I_i \tag{2.7}$$

avec $I_i = \int_{\mathcal{D}_i} \frac{G(x)}{P_i} f_{\underline{X}}(x) dx$.
Chacune des intégrales I_i est estimée par une simulation de Monte Carlo standard en effectuant N_i tirages. Le nombre total de tirages est égal à $N = \sum_{i=1}^{K} N_i$. On note Θ_i l'estimateur de I_i. Il s'écrit :

$$\Theta_i = \frac{1}{N_i} \sum_{k=1}^{N_i} G(\underline{X}^{(k)}) \tag{2.8}$$

L'estimateur de I et sa variance par la méthode du tirage stratifié sont donnés par :

$$\Theta_N^{str} = \sum_{i=1}^{K} P_i \Theta_i = \sum_{i=1}^{K} P_i \frac{1}{N_i} \sum_{k=1}^{N_i} G(X_k^{(i)}) \tag{2.9}$$

$$(\sigma_N^{str})^2 = \sum_{i=1}^{K} \frac{P_i^2}{N_i} \mathrm{Var}[G(\underline{X}^{(k)})] = \sum_{i=1}^{K} \frac{P_i \sigma_i^2}{N_i} \tag{2.10}$$

B.3 Méthode de l'hypercube latin

Cette technique [MBC79, OSD03] a pour objectif de limiter le nombre total de tirages. Pour cela, on n'effectue pas de tirages dans toutes les strates mais seulement sur un sous-ensemble défini selon un certain critère. L'intégration se fait sur N variables indépendantes, chacune stratifiée en K intervalles équiprobables numérotés de 1 à K. Ceci donne un ensemble de cellules équiprobables, chacune repérée par un vecteur dont les coordonnées sont le numéro de la strate de la i-ème variable choisie pour la cellule k. La méthode de l'hypercube latin consiste à ne tirer qu'une fois et une seule dans chaque strate de chaque variable (figure B.1). Pour cela, on définit une table de tirages qui explicite les hypercubes à l'intérieur duquel il y aura

1 tirage. On réalise ensuite la simulation (il y a en tout K tirages) et on obtient l'estimateur :

$$\Theta_N^{HL} = \frac{1}{K}\sum_{j=1}^{K} G(X^{(j)}) \tag{2.11}$$

(2.12)

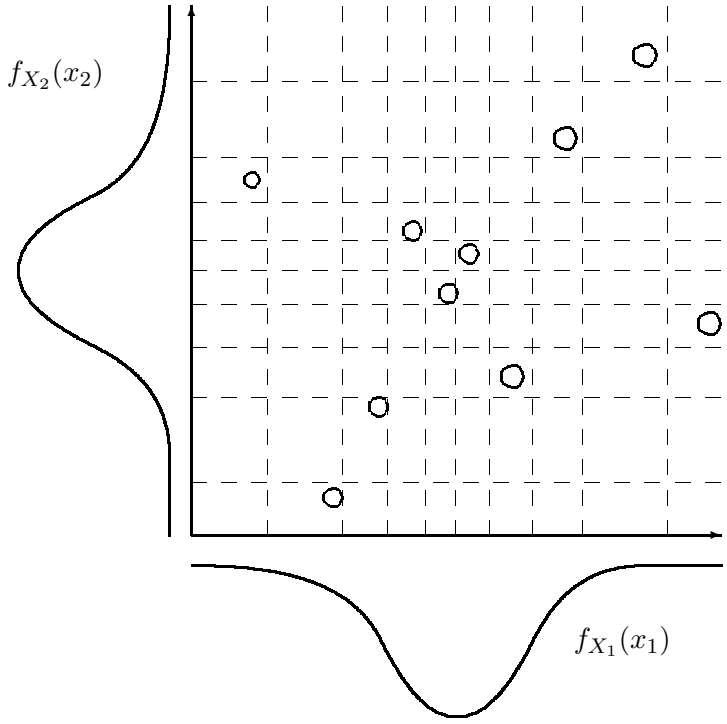
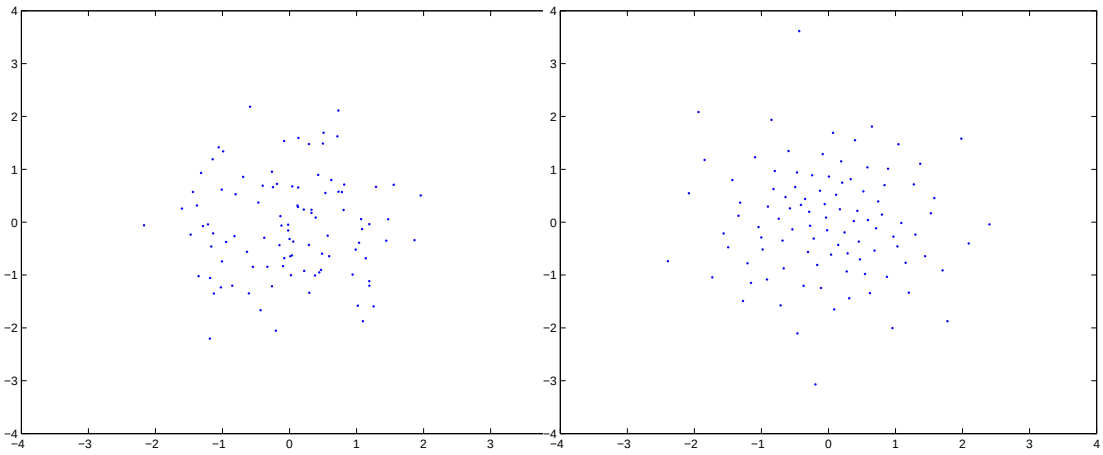


Fig. B.1 – Principe de l'hypercube latin

La figure B.2 représente les tirages de 100 points de deux variables aléatoires gaussiennes centrées réduites dans le cas d'une simulation de Monte Carlo standard et d'une simulation d'Hypercube Latin. On remarque que les tirages dans le cas de la simulation d'Hypercube Latin sont mieux répartis dans l'espace.



(a) méthode de Monte Carlo (b) méthode Hypercube Latin

Fig. B.2 – Répartition de 100 tirages pour différentes méthodes de simulation

Annexe -C-

Méthodes de fiabilité

C.1 Présentation

La fiabilité des structures ([DM96, Lem05]) cherche à calculer la probabilité de défaillance d'une structure en tenant compte de la variabilité de paramètres (géométrie, matériau, chargement). Les paramètres sont représentés par des variables aléatoires. Soit $\underline{X}$ le vecteur aléatoire les regroupant, dont on se donne la densité de probabilité conjointe $f_{\underline{X}}(\underline{x})$. Soit $S(\underline{X})$ la réponse mécanique du système (déplacements, déformations, contraintes, etc.). Pour chaque mode de défaillance de la structure, une fonction d'état limite $g(\underline{X}, S(\underline{X}))$ est définie dans l'espace des paramètres. Par convention, le domaine de sûreté est défini par $D_s = \{\underline{X} | g(\underline{X}, S(\underline{X})) > 0\}$, et le domaine de défaillance par $D_f = \{\underline{X} | g(\underline{X}, S(\underline{X})) \leq 0\}$. La frontière $\{g(\underline{X}, S(\underline{X})) = 0\}$ est la *surface d'état limite*.
La probabilité de défaillance P_f est donnée par :

$$P_f = \text{Prob}\left[g(\underline{X}, S(\underline{X})) \leq 0\right] = \int_{g(\underline{X}, S(\underline{X})) \leq 0} f_{\underline{X}}(\underline{x}) dx_1 \cdots dx_n \tag{3.1}$$

Le calcul de cette intégrale n'est pas possible explicitement lorsque le domaine de défaillance est défini implicitement à partir de $S(\underline{X})$ qui est donné par le calcul aux éléments finis.

C.2 Méthode FORM/SORM

La probabilité de défaillance P_f définie dans l'équation (3.1) est rarement utilisable directement, le domaine d'intégration étant défini implicitement. La méthode FORM (*First Order Reliability Method*) permet d'obtenir une approximation de cette intégrale.
La première étape de la méthode FORM consiste en la reformulation de (3.1) dans l'*espace réduit*, espace dans lequel toutes les variables aléatoires suivent des lois gaussiennes centrées réduites. Pour ce faire, on utilise une transformation isoprobabiliste $T : \underline{X} \rightarrow \mathbf{U}(\underline{X})$. Les transformations couramment utilisées sont celles de Rosenblatt ou Nataf ([DM96]). En utilisant ce changement de variable, l'équation (3.1) se réécrit :

$$P_f = \int_{g(T^{-1}(\underline{U}), S(T^{-1}(\underline{u})))} \varphi_n(\underline{U}) du_1 \dots du_n \tag{3.2}$$

avec φ_n la densité de probabilité multinormale de dimension n :

$$\varphi_n(\underline{u}) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \exp\left[-\frac{1}{2}(u_1^2 + \cdots + u_n^2)\right] \tag{3.3}$$

Cette densité de probabilité est maximale à l'origine et décroît exponentiellement avec $\|u\|^2$. Les points contribuant le plus à l'intégrale (3.2) sont donc ceux appartenant au domaine de défaillance $D_f = \{g(T^{-1}(\underline{U}, S(T^{-1}(\underline{U}))) \leq 0\}$ les plus

proches de l'origine.
La seconde étape de la méthode FORM consiste donc en la détermination du point de conception P^*, point du domaine de défaillance D_f le plus proche de l'origine. Ce point est solution du problème d'optimisation

$$P^* = \text{Argmin}\{\|u\|^2 \mid g(T^{-1}(\underline{U}), S(T^{-1}(\underline{U})))) \leq 0\} \tag{3.4}$$

La distance de ce point à l'origine est appelée indice de fiabilité β (éventuellement affecté du signe - si l'origine de l'espace réduit est dans le domaine de défaillance).
La troisième étape de la méthode FORM consiste à *approximer* le domaine d'intégration D_f dans (3.2) par le demi-espace défini par l'hyperplan tangent à D_f en P^* (figure C.1, où $H(\underline{U}) = 0$ représente la surface d'état limite). L'intégration de φ_n sur ce demi-espace est alors analytique :

$$P_f \approx P_{f,FORM} = \Phi(-\beta) \tag{3.5}$$

où Φ est la fonction de répartition gaussienne centrée réduite.
Un algorithme d'optimisation permet de trouver le point de conception en résolvant le problème de minimisation défini par (3.4). Les méthodes SORM (Second Order Reliability Method) sont des extensions de la méthode FORM. Dans l'une d'elle, la surface d'état limite est approximée par un hyperparaboloïde d'ordre 2 au voisinage du point de conception. Si $(\kappa_1, \cdots, \kappa_{n-1})$ désignent les courbures principales de cet hyperparaboloïde, l'approximation SORM de la probabilité de défaillance s'écrit (Formule de Breitung [Rac01]) :

$$P_f \approx P_{f,SORM} = \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1-\beta\kappa_i}} \tag{3.6}$$

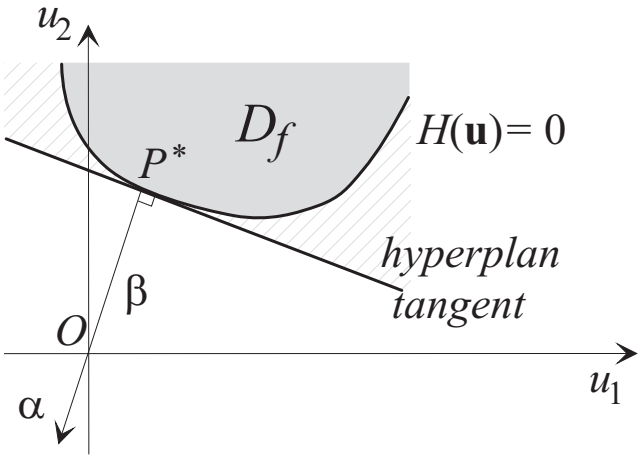


Fig. C.1 – Principe de l'approximation FORM ([Lem05])

C.3 Tirage d'importance (ou Importance Sampling)

Les simulations de Monte Carlo sont les méthodes les plus simples à mettre en œuvre pour calculer la probabilité de défaillance d'un système, mais ce sont aussi les plus coûteuses. Après avoir engendré des réalisations pour les variables aléatoires d'entrée selon leur densité conjointe de probabilité, on évalue la fonction d'état limite pour ces réalisations. On compte le nombre total de cas défaillants parmi les calculs effectués. Ce qui permet d'estimer la probabilité en fonction du nombre de cas défaillants par rapport au nombre total des réalisations effectuées (Figure C.2). Pour s'assurer de la convergence des méthodes de simulation, il faut calculer le coefficient de variation de la simulation : la convergence est atteinte pour un coefficient de variation d'environ 5%.

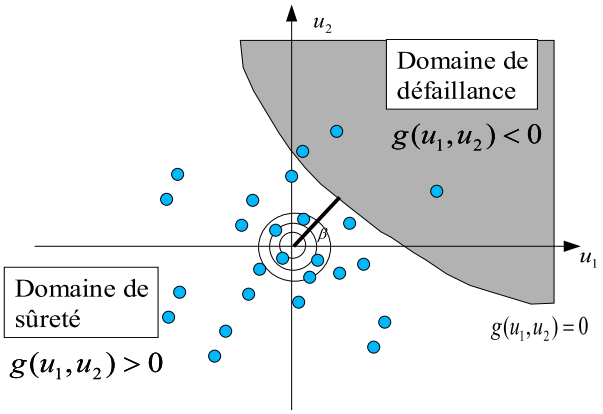


Fig. C.2 – Calcul d'une probabilité de défaillance par simulation de Monte Carlo

Les simulations d'importance [Mel90, Lem05] sont des méthodes efficaces pour estimer la probabilité de défaillance. Ces méthodes ont été développées afin de générer des tirages qui conduisent plus fréquemment à la défaillance et permettent de gagner plus d'information sur le domaine de défaillance. Comme le poids de la probabilité de défaillance est généralement situé au voisinage du point de conception, il est plus efficace de concentrer les tirages autour de ce point (figure C.3). Le point de conception est trouvé par la méthode FORM par exemple. On introduit la fonction $\psi(\underline{u})$, dite densité d'importance. On peut la prendre égale à la densité multinormale réduite centrée au point de conception de coordonnées $\underline{u}^*$.

$$\psi(\underline{U}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(\frac{-\|\underline{U}-\underline{U}^*\|}{2}\right) \tag{3.7}$$

Dans ce cas, pour simuler $\underline{U}$ suivant la densité $\psi(\underline{U})$, on génère d'abord une variable multinormale centrée réduite $\underline{U}_r$ et on effectue le changement de variables

$\underline{U} = \underline{U}_r + \underline{U}^*$. P_f s'écrit alors sous la forme :

$$P_f = \int_{g(\underline{U}\leq 0)} \varphi_{\underline{U}}(\underline{u}) d\underline{U} = \int_{g(\underline{U}\leq 0)} \varphi_{\underline{U}}(\underline{u}) \frac{\psi(\underline{U})}{\psi(\underline{U})} d\underline{u} \tag{3.8}$$

En notant $\mathbf{1}_{g(\underline{U}\leq 0)}$ la fonction indicatrice du domaine de défaillance, l'expression (3.8) devient :

$$P_f = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{g(\underline{U}\leq 0)} \frac{\varphi_n(\underline{U})}{\psi(\underline{U})} \psi(\underline{U}) d\underline{u} \tag{3.9}$$

ce qui s'interprète comme l'espérance d'une certaine fonction de $\underline{U}$ par rapport à la densité d'importance :

$$P_f = \mathrm{E}_\psi \left[\mathbf{1}_{g(\underline{U}\leq 0)} \frac{\varphi_n(\underline{U})}{\psi(\underline{U})} \right] \tag{3.10}$$

On peut alors évaluer cette quantité par simulation de Monte Carlo. En utilisant K réalisations du vecteur aléatoire $\underline{U}$, on obtient :

$$P_f = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{K} \mathbf{1}_{g(\underline{U}^{(i)}\leq 0)} \frac{\varphi_n(\underline{U}^{(i)})}{\psi(\underline{u}^{(i)})} \tag{3.11}$$

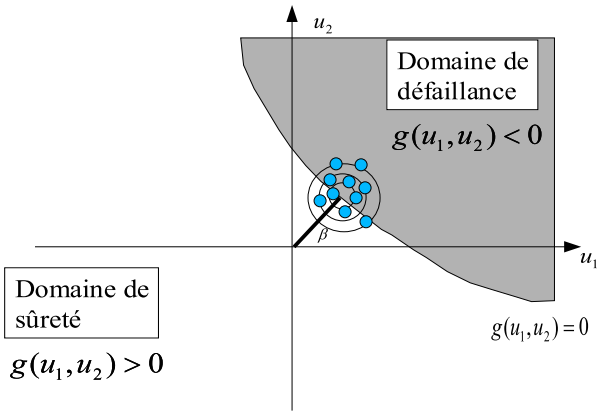


Fig. C.3 – Principe du tirage d'importance

Annexe -D-

Table des notations

Cette annexe regroupe les principales notations apparaissant dans le mémoire. Les symboles utilisés sont classés en deux catégories : les lettres latines puis les lettres grecques, chacunes par ordres alphabétique, indépendamment du chapitre où elles apparaissent. Les symboles pouvant avoir plusieurs significations sont répétés.

Lettres latines

$()^T$	Transposée d'une matrice
$()_l$	Terme d'ordre inférieur
$()_h$	Terme d'ordre supérieur
$B(r,s)$	Fonction Bêta d'Euler
$\boldsymbol{B}$	Matrice donnant les composantes de déformations en fonction des déplacements nodaux
$C(\underline{x},x')$	Fonction d'autocovariance d'un champ aléatoire
Cov[.,.]	Covariance de deux variables aléatoires
d_{ijk}	Espérance du produit de trois polynômes d'Hermite de degré i, j, et k
$\boldsymbol{D}$	Matrice d'élasticité
$\boldsymbol{D}_0$	Matrice d'élasticité correspondant à un module d'Young unitaire
D_S	Domaine de sûreté
D_f	Domaine de défaillance
E[.]	Espérance d'une variable aléatoire
$f_X(x)$	Densité de probabilité de la variable aléatoire X
$f_{X,Y}(x,y)$	Densité de probabilité conjointe de deux variables aléatoires X et Y
$F_X(x)$	Fonction de répartition de la variable aléatoire X
$\underline{F}$,$\underline{F}(\theta)$	Vecteur des efforts nodaux (resp. stochastique)
$\underline{F}_i$	Vecteurs des efforts nodaux unitaires
$\underline{\mathcal{F}}$	Vecteur des efforts nodaux du système stochastique
$g(.)$	Fonction d'état limite
$H(\underline{x},\theta)$	Champ aléatoire
$H_n(x)$	Polynôme d'Hermite de degré n
$\boldsymbol{K}$,$\boldsymbol{K}(\theta)$	Matrice de rigidité globale (resp. stochastique)
$\boldsymbol{k}_e$	Matrice de rigidité élémentaire de l'élément e
$\boldsymbol{\mathcal{K}}$	Matrice de rigidité globale du système stochastique
$\boldsymbol{K}_0$	Matrice de rigidité associé à un module d'Young unitaire
$\boldsymbol{K}_j$	Matrice de rigidité d'ordre i dans le développement de $\boldsymbol{K}(\theta)$
$\mathcal{L}^2(\Theta,\mathcal{F},P)$	Espace vectoriel des variables aléatoires réelles ayant un second moment fini
$\boldsymbol{L}$	Matrice triangulaire inférieure de la décomposition de Cholesky
M	Dimension du chaos polynomial
N_q	Nombre de chargements imposés à la structure
p	Ordre du chaos polynomial
P	Nombre de polynômes dans le chaos polynomial
P_f	Probabilité de défaillance

$P_{f,FORM}$	Probabilité de défaillance approximée par la méthode FORM
$P_{f,SORM}$	Probabilité de défaillance approximée par la méthode SORM
q^i	Paramètre de chargement
S	Réponse mécanique du système
$\underline{U}$,$\underline{U}(\theta)$	Vecteur des déplacements nodaux (resp. stochastique)
$\underline{u}_e$	Vecteur des déplacements nodaux de l'élément e
$\underline{\mathcal{U}}$	Vecteur des inconnues du système stochastique
$\mathrm{Var}[X]$	Variance de la variable aléatoire X
X	Variable aléatoire
$\underline{X}$	Vecteur aléatoire
x,x^i	Réalisation d'une variable aléatoire
x_j	points d'intégration dans les quadratures de Gauss
$\tilde{X}$	Approximation de la variable aléatoire X
$\underline{x}$	Point de Ω_e

Lettres grecques

$\boldsymbol{\alpha}$	Liste d'entiers servant à définir le chaos polynomial
β	Indice de fiabilité
$\Gamma(z)$	Fonction Gamma d'Euler
ΔX	Ecart entre X et $\tilde{X}$
δ_{nm}	Symbole de Kronecker
δ_X	Coefficient d'asymétrie (skewness) de la variable aléatoire X
ε_σ	Erreur relative en variance
$\underline{\varepsilon}_0$	Déformations imposées
$\underline{\varepsilon}$	Vecteur contenant les composantes des déformations
ϵ_P	Résidu de l'équation d'équilibre après troncature à l'ordre P
Θ	Ensemble des réalisations possibles d'une épreuve
θ	Réalisation d'une expérience aléatoire
κ_X	Coefficient d'aplatissement (kurtosis) de la variable aléatoire X
λ	Coefficient de Lamé (module volumétrique)
μ	Coefficient de Lamé (module de cisaillement)
μ_X	Moyenne de la variable aléatoire X
ν	Coefficient de Poisson
ξ	Variable gaussienne centrée réduite
$\rho_{X,Y}$	Coefficient de corrélation entre deux variables aléatoires X et Y
σ_X	écart-type de la variable aléatoire X
$\underline{\sigma}_0$	Etat de précontrainte
$\underline{\sigma}$	Vecteur contenant les composantes des contraintes
$\varphi(x)$	Densité de probabilité d'une loi gaussienne centrée réduite
$\varphi_M(x)$	Densité de probabilité multinormale

$\Phi(x)$	Fonction de répartition d'une loi gaussienne centrée réduite
$\Psi_{\boldsymbol{\alpha}}$	Polynôme du chaos polynomial correspondant à la liste $\boldsymbol{\alpha}$
ω_j	poids d'intégration dans les quadratures de Gauss
Ω_e	Volume d'un élément
∂_α	Degré de la liste $\boldsymbol{\alpha}$